



Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
Ano 2010/2011

**Maria Elena Nunes
Oliveira Costa**

GRAFOS FORTEMENTE REGULARES E COMBINATORIA

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática e Aplicações, realizada sob a orientação científica da Prof. Doutora Paula Carvalho e a co-orientação da Prof. Doutora Paula Rama, ambas Professoras Auxiliares do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

Dedico este trabalho aos meus filhos pelo incansável amor que me dão todos os dias, ao meu esposo por nunca me ter deixado desistir e aos meus pais por me apoiarem sempre.

o júri

Presidente

Prof. Doutora Isabel Maria Simões Pereira
Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro

Vogal – Arguente Principal

Prof. Doutor Henrique José Freitas da Cruz
Professor Auxiliar da Universidade da Beira Interior

Vogal – Orientador

Prof. Doutora Maria Paula Lopes dos Reis Carvalho
Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro

Vogal – Co-Orientador

Prof. Doutora Paula Cristina Roque da Silva Rama
Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro

palavras-chave

Teoria dos grafos, *design*, geometrias finitas.

resumo

Nesta dissertação apresenta-se uma breve introdução à teoria dos grafos, *designs* combinatórios e geometrias finitas e estabelecem-se algumas relações entre estas estruturas combinatórias. No contexto dos grafos, é dada ênfase aos grafos fortemente regulares e às propriedades da matriz de adjacência. Nos *designs* combinatórios considera-se a construção de 1-*designs* e estudam-se algumas propriedades dos 2-*designs* e sistemas de Steiner. Apresentam-se várias ligações entre *designs* e grafos fortemente regulares e, em particular, mostra-se que o grafo dos blocos de um *design* quasi-simétrico é um grafo fortemente regular. Nas geometrias finitas consideram-se propriedades básicas dos planos afins e dos planos projectivos. Das propriedades destas geometrias, destacam-se a correspondência com determinadas famílias de 2-*designs* e a propriedade do grafo de incidência de um plano projectivo ser um grafo bipartido regular com cintura 6.

keywords

Graph theory, *designs*, finite geometries.

abstract

In this dissertation a brief introduction to graph theory, combinatorial *designs* and finite geometries is presented and some interconnections among those combinatorial structures are shown. In the context of graphs, some emphasis is given to strongly regular graphs and properties of the adjacency matrices. Properties of 2-*designs* and Steiner systems are studied as well as the construction of 1-*designs*. In addition, some connections between *designs* and strongly regular graphs are presented and it is shown that the block graph of a quasi-symmetric design is strongly regular. The finite geometries studied are the affine planes and the projective planes. Basic properties are considered, particularly the correspondence between those geometries and several families of 2-*designs* and the incidence graph of a projective plane being a regular bipartite graph with girth 6.

Índice

Índice	i
Lista de imagens	iii
Introdução	1
Capítulo I: Noções da teoria dos grafos.....	3
1.1 Algumas definições básicas da teoria dos grafos.....	3
1.2 Propriedades básicas da matriz de adjacência	14
1.3 Grafos fortemente regulares.....	16
Capítulo II: <i>Designs</i> combinatórios	25
2.1 Designs combinatórios.....	25
2.2 Matriz de incidência de um design	37
2.3 Designs quasi-simétricos	40
Capítulo III: Geometrias finitas	45
3.1 Planos afins	45
3.2 Planos projetivos.....	49
3.3 Grafo de incidência de um plano projetivo.....	54
Conclusão	57
Referencias bibliográficas	58

Lista de imagens

Fig. 1.1: Exemplo de um grafo (não orientado) G , e de um digrafo, \bar{G}	4
Fig. 1.2: Exemplo de um multigrafo.....	5
Fig. 1.3: Grafos isomorfos.....	6
Fig. 1.4: Complementar do grafo G_2	8
Fig. 1.5: Grafos completos K_5 e K_6	8
Fig. 1.6: Subgrafos próprios do grafo G da Fig. 1.1	9
Fig. 1.7: Exemplo de um grafo conexo	11
Fig. 1.8: Exemplo de um grafo desconexo formado por duas componentes conexas	11
Fig. 1.9: O ciclo C_5 é um grafo fortemente regular com parâmetros $(5,2;0,1)$	16
Fig. 1.10: O grafo de Petersen é um grafo fortemente regular com parâmetros $(10,3;0,1)$. ..	17
Fig. 1.11: $K_{3,3}$ é um grafo fortemente regular imprimitivo com parâmetro $(6,3;0,3)$	20
Fig. 2.1: Exemplo de um 3- <i>design</i> com parâmetros $(8,4,1)$, um 3- <i>design</i> de Hadamard.	26
Fig. 2.2: Uma representação de um 2- <i>design</i> com parâmetros $(4,3,2)$	27
Fig. 2.3: Uma representação de um $(7,3,1)$ - <i>design</i>	27
Fig. 2.4: O $(7,3,1)$ - <i>design</i> , é o menor <i>Triplo de Steiner</i> , $STS(7)$	36
Fig. 2.5: Representação de um sistema de triplos de Steiner, $STS(9)$	36
Fig. 2.6: Grafo dos blocos de um $(4,2,1)$ - <i>design</i>	42
Fig. 3.1: Plano afim de ordem 2 com quatro pontos	46
Fig. 3.2: Plano afim de ordem 3 com nove pontos.	47
Fig. 3.3: Ilustração para demonstração do Proposição 3.1	48
Fig. 3.4: Plano Projetivo de ordem 2 com sete pontos.	50
Fig. 3.5: Ilustração para a demonstração do Proposição 3.2	51
Fig. 3.6: Plano projetivo de ordem 3 com treze pontos.	52
Fig. 3.7: Plano projetivo de ordem 4 com vinte e um pontos.....	52
Fig. 3.8: Biplano de ordem 1 e $k = 3$	53
Fig. 3.9: Plano de Fano e o seu grafo de incidência	54

Introdução

Este trabalho contempla três temas que fazem parte de três áreas importantes da matemática discreta: grafos, *designs* combinatórios e geometrias finitas.

A teoria dos grafos é apenas um dos ramos do vasto campo conhecido hoje em dia como combinatória. Tem aplicações em inúmeras áreas incluindo telecomunicações, eletrônica, desenho de circuitos integrados, redes de várias espécies. Um dos factos que melhor evidencia esta relação e que, pensa-se, deu origem à teoria dos grafos, foi o conhecido problema das pontes de Königsberg, problema que é bem conhecido tanto em matemática como em ciências de computação e que o matemático Leonhard Euler no século XVIII, resolveu pela negativa. O problema consistia em saber se as sete pontes da cidade de Königsberg que ligavam quatro zonas da cidade, duas das quais situadas em duas ilhas, podiam ser atravessadas uma única vez num passeio com origem e chegada ao mesmo local.

Os *designs* são estruturas combinatórias com elevado grau de regularidade; estão relacionados com a existência e construção de sistemas de conjuntos finitos cujas intersecções têm certas propriedades. A sua origem parece ter sido na estatística: um dos exemplos mais apelativos que ocorre na literatura é o problema de uma companhia de cafés que pretende comparar um certo número de marcas de café usando um procedimento que prevê que cada pessoa experimente o mesmo número de marcas, de modo a que cada pessoa tenha o mesmo peso na decisão e, cada par de marcas seja experimentado pelo mesmo número de pessoas, de modo que cada variedade tenha o mesmo tratamento.

A geometria desempenha, como é sabido, um papel importante em várias áreas. Será que a chamada geometria euclidiana ainda hoje ensinada na escola é a única geometria importante do mundo real? Existem outros tipos de geometrias entre as quais as geometrias finitas que desempenham um papel importante na matemática e na resolução de problemas que ocorrem na vida real.

Este trabalho tem como objetivo estudar estes três objetos matemáticos, grafos, *designs* e geometrias finitas no que diz respeito às relações que se estabelecem entre eles.

O trabalho está organizado em três capítulos cada um dedicado a um dos temas referidos.

No capítulo I apresentam-se conceitos e resultados gerais sobre grafos. Estudam-se, de um modo especial, uma classe importante de grafos regulares, os grafos fortemente regulares, nos quais dois vértices adjacentes têm um mesmo número de vizinhos, a , e dois vértices não adjacentes têm também um número c , de vizinhos em comum. Devido às fortes ligações destes grafos com a teoria das matrizes, apresenta-se uma breve síntese de resultados sobre matrizes necessária à compreensão do texto.

No capítulo II define-se *t-design* e estudam-se em particular os *2-designs*. Define-se, ainda, sistemas de Steiner como casos especiais de *t-designs* e, mostram-se algumas propriedades básicas destas estruturas dando-se especial destaque à relação entre triplos de Steiner e grafos completos, e entre *designs* quasi-simétricos e grafos fortemente regulares.

No capítulo III, geometrias finitas, faz-se uma abordagem às geometrias finitas por meio do estudo particular dos planos afins e dos projetivos finitos, observando algumas relações que existem entre as geometrias finitas, *designs* e grafos. Define-se axiomáticamente plano afim e plano projetivo finitos e dão-se exemplos conhecidos estabelecendo relações com os capítulos anteriores. Em particular, refere-se que um plano projetivo e um plano afim podem ser vistos como sistemas de Steiner e, por fim, considera-se o grafo de incidência de um plano projectivo.

Capítulo I: Noções da teoria dos grafos

1.1 Algumas definições básicas da teoria dos grafos

Nesta secção faz-se uma breve introdução à teoria dos grafos, apresentando algumas definições e resultados básicos. Os grafos são estruturas combinatórias que, em abstrato, podem ser usados para resolver problemas práticos reais, tais como: problemas de gestão de redes de transportes, de gestão de redes de distribuição de serviços, etc.

A principal referência utilizada nesta secção é o livro [5]. Em seguida, apresenta-se uma definição formal de grafo.

Definição 1.1: Um *grafo* não orientado é um terno $G = (V(G), E(G), \psi_G)$, onde $V = V(G)$ é um conjunto não vazio que se designa por *conjunto dos vértices*, $E = E(G)$ é um conjunto disjunto de V que se designa por *conjunto das arestas*, e ψ_G é uma função, dita *função de incidência*, tal que, para cada $e \in E$, $\psi_G(e)$ denota um par não ordenado de elementos de V .

Com o objetivo de simplificar a notação, ao longo do texto escreve-se, como é habitual, $\psi_G(e) = uv$ em vez de $\psi_G(e) = \{u, v\}$, para indicar que e é a aresta que liga os vértices u e v ; onde os vértices u e v dizem-se os *extremos* da aresta e .

Se a função de incidência ψ_G determinar para cada elemento $e \in E$ um par ordenado de elementos de V , o grafo diz-se um *grafo orientado* ou *digrafo* e denota-se por $\vec{G} = (V(\vec{G}), E(\vec{G}), \psi_{\vec{G}})$. Neste caso o conjunto E diz-se o conjunto dos *arcos* e escreve-se $\psi_{\vec{G}}(e) = uv$ para indicar que $\psi_{\vec{G}}(e) = (u, v)$; de modo idêntico, u e v dizem-se extremos do arco e , sendo u a *cauda* e v a *cabeça* do arco e .

Diz-se que uma aresta ou um arco incidem nos seus vértices extremos e, consequentemente, estes vértices dizem-se *adjacentes* ou *vizinhos*. O conjunto dos vértices vizinhos de um dado vértice $u \in V(G)$, denota-se por $N_G(u)$ e designa-se por *vizinhança de u* .

Exemplo 1.1: O terno $G = (V(G), E(G), \psi_G)$, com $V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$, $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ e $\psi_G(e_1) = 12$, $\psi_G(e_2) = 13$, $\psi_G(e_3) = 23$, $\psi_G(e_4) = 24$, $\psi_G(e_5) = 34$ é o grafo G representado na Fig. 1.1 e o terno $\vec{G} = (V(\vec{G}), E(\vec{G}), \psi_{\vec{G}})$ com $V(\vec{G}) = \{1, 2, 3, 4\}$, $E(\vec{G}) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ e $\psi_{\vec{G}}(e_1) = 12$, $\psi_{\vec{G}}(e_2) = 13$, $\psi_{\vec{G}}(e_3) = 23$, $\psi_{\vec{G}}(e_4) = 42$, $\psi_{\vec{G}}(e_5) = 34$, é o digrafo \vec{G} representado na mesma figura.

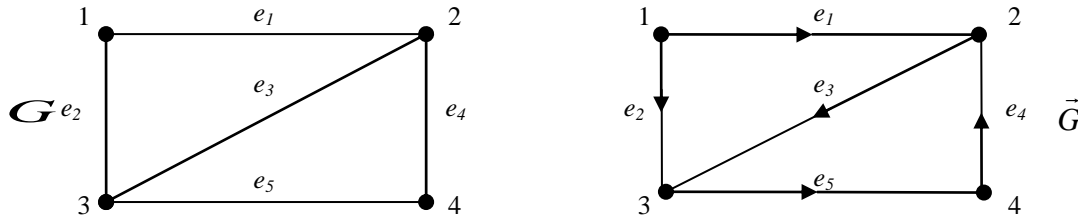


Fig. 1.1: Exemplo de um grafo (não orientado) G , e de um digrafo, \vec{G}

Definição 1.2: Um grafo diz-se *grafo simples*, se não contém arestas *paralelas* (arestas com os mesmos vértices extremos) ou *lacetes* (aresta e com ambos os extremos no mesmo vértice, ou seja, $\psi_G(e) = vv$). Um grafo com arestas paralelas ou lacetes designa-se por *multigrafo*.

Exemplo 1.2: Um exemplo de grafo simples é o grafo G representado na Fig. 1.1. O grafo representado na Fig. 1.2 definido pelo terno $G = (V(G), E(G), \psi_G)$, com $V(G) = \{1, 2, 3\}$, $E(G) = \{a, b, c, d, e\}$ onde $\psi_G(a) = 11$, $\psi_G(b) = 12$, $\psi_G(c) = 13$, $\psi_G(d) = 23$, $\psi_G(e) = 23$, é um multigrafo pois contém um lacete, a aresta a , e duas arestas paralelas, d e e .

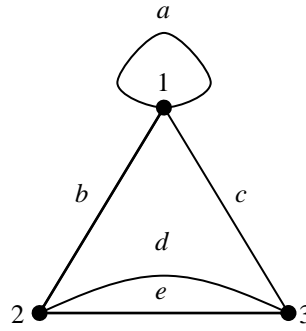


Fig. 1.2: Exemplo de um multigrafo

Num grafo G simples uma aresta é definida pelos seus vértices extremos, sendo assim o grafo G passa a ser denotado simplesmente por $G = (V(G), E(G))$. Também se escreve apenas $G = (V, E)$ quando esta notação se mostrar suficiente para identificar o grafo com que se trabalha. A partir de agora considera-se apenas grafos simples.

Seja $G = (V(G), E(G))$. Define-se *ordem* de G como sendo o número de vértices de G , $|V(G)|$, e denota-se por $n(G)$; define-se *dimensão* de G como sendo o número de arestas de G , $|E(G)|$, e denota-se por $\varepsilon(G)$.

Designa-se por *grau* de v e denota-se por $d_G(v)$ ou, simplesmente, por $d(v)$, o número de arestas incidentes no vértice v . O maior e o menor dos graus dos vértices de G denota-se por $\Delta(G)$ e $\delta(G)$, respetivamente.

Um grafo diz-se *k-regular* ou *regular de grau k* se todos os seus vértices têm grau k , isto é, para todo vértice $v \in V(G)$ se tem $d_G(v) = k$.

Embora a representação de um grafo por um diagrama seja apelativa à compreensão da estrutura abstrata, ela revela-se sem interesse prático quando se usam computadores para resolver problemas em que as estruturas de dados representam grafos. Há várias maneiras de representar um grafo com vantagens ou desvantagens, dependendo da natureza do problema a resolver e da estrutura do grafo em questão, entre outras; algumas das mais conhecidas são a utilização de lista de arestas ou a utilização de matrizes; relativamente às

matrizes destacam-se a matriz de incidência e a matriz de adjacência que são definidas a seguir.

Definição 1.3: Seja $G = (V, E)$ um grafo simples de ordem $n(G) = n$ e dimensão $\varepsilon(G) = \varepsilon$ tal que $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $E = \{e_1, e_2, \dots, e_\varepsilon\}$. Designa-se por *matriz de incidência de G* , e denota-se por $M_G = (m_{ij})$, a matriz de dimensão $n \times \varepsilon$, tal que:

$$m_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } e_j = v_p v_q, \text{ com } i \notin \{p, q\}; \\ 1, & \text{se } e_j = v_i v_k \text{ para algum } v_k \in V. \end{cases}$$

Definição 1.4: Dado um grafo simples $G = (V, E)$, de ordem n , com $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, designa-se por *matriz de adjacência de G* e denota-se por $A_G = (a_{ij})$, a matriz de dimensão $n \times n$, cujas entradas a_{ij} , são dadas por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } v_i v_j \in E(G); \\ 0, & \text{no caso contrário.} \end{cases}$$

É claro que a matriz de adjacência de um grafo simples é uma matriz simétrica e todas as entradas da diagonal principal são nulas.

Definição 1.5: Dois grafos simples $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$ e $G_2 = (V(G_2), E(G_2))$, dizem-se *isomorfos*, denotando-se esta relação de isomorfismo por $G_1 \cong G_2$, se existe uma bijeção $\varphi : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ tal que $uv \in E(G_1)$ se e apenas se $\varphi(u)\varphi(v) \in E(G_2)$.

Exemplo 1.3: Os grafos simples G_1 e G_2 da Fig. 1.3, representam um exemplo de grafos isomorfos.

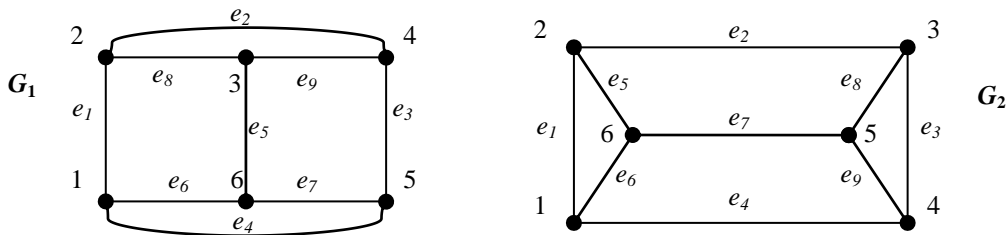


Fig. 1.3: Grafos isomorfos

A função

$$\varphi : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$$

$$1 \rightarrow 2$$

$$4 \rightarrow 4$$

$$2 \rightarrow 3$$

$$5 \rightarrow 1$$

$$3 \rightarrow 5$$

$$6 \rightarrow 6$$

é uma bijeção que satisfaz a Definição 1.5. As matrizes de incidência de G_1 e G_2 são dadas, respetivamente, por:

$$M_{G_1} = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \text{e} \quad M_{G_2} = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

A soma das entradas de cada linha da matriz de incidência coincide com o grau de cada vértice, e a soma das entradas de cada coluna é igual a 2 (número de extremos de cada aresta). As matrizes de adjacência de G_1 e G_2 são, respetivamente:

$$A_{G_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_{G_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observe-se também que a soma dos elementos de cada coluna da matriz de adjacência é igual à soma dos elementos da linha correspondente e coincide com o grau do respetivo vértice. Note-se que todos os vértices dos grafos G_1 e G_2 têm grau 3 pois, G_1 e G_2 são grafos 3-regulares.

Definição 1.6: O complemento de um grafo simples G , ou complementar de G , denotado por \overline{G} , é o grafo simples que possui o mesmo conjunto de vértices de G , e tal que dois vértices distintos são adjacentes em \overline{G} se e somente se não são adjacentes em G .

Exemplo 1.4: Considerando o grafo G_2 da Fig. 1.3, o seu complementar é o grafo \overline{G}_2 representado na Fig. 1.4.

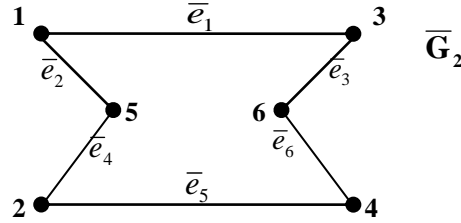


Fig. 1.4: Complementar do grafo G_2

Note-se que se um grafo G de ordem n é k -regular então o seu complementar, \overline{G} , é um grafo $(n-k-1)$ -regular pois, cada vértice $v \in V(\overline{G})$ é adjacente em \overline{G} aos $n-k-1$ vértices (distintos de v) que não pertencem à sua vizinhança em G , isto é,

$$N_{\overline{G}}(v) = V(\overline{G}) \setminus (N_G(v) \cup \{v\}).$$

Por exemplo, o grafo G_2 da Fig. 1.3 tem ordem $n=6$ e é 3-regular. O seu complementar \overline{G}_2 é regular de grau $n-k-1=2$.

Definição 1.7: Um grafo simples de ordem $n > 0$ diz-se *completo* e denota-se por K_n , se todos os pares de vértices são adjacentes, isto é, $d_{K_n}(v) = n-1$, para todo o vértice $v \in V(K_n)$.

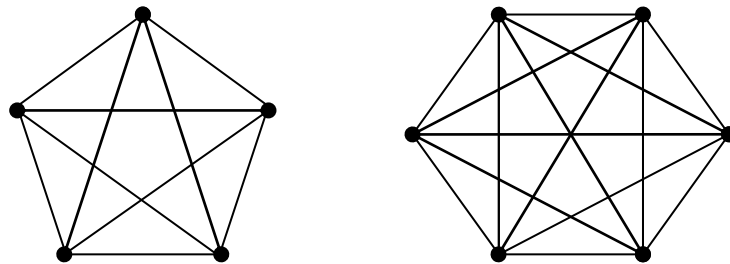


Fig. 1.5: Grafos completos K_5 e K_6

Da Definição 1.7 conclui-se de imediato que um grafo completo de ordem n é um grafo $(n-1)$ -regular.

Definição 1.8: Um grafo $G = (V(G), E(G))$ diz-se um *grafo nulo* se não tem arestas, isto é, se $E(G) = \emptyset$. Neste caso, $V(G) \neq \emptyset$, todos os vértices são isolados.

Definição 1.9: Dados dois grafos $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ e $H = (V(H), E(H), \psi_H)$, diz-se que H é um *subgrafo de G* e denota-se $H \subseteq G$ se $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$ e ψ_H é a restrição de ψ_G ao conjunto $E(H)$. Se $H \subseteq G$ e $H \neq G$, então H designa-se por *subgrafo próprio de G* e denota-se $H \subset G$.

Definição 1.10: Dado um grafo $G = (V(G), E(G))$ e $\emptyset \neq \hat{V} \subseteq V(G)$, designa-se por *subgrafo de G induzido por \hat{V}* e denota-se por $G[\hat{V}]$, o subgrafo cujo conjunto de vértices é \hat{V} e o conjunto de arestas coincide com as arestas de G com ambos os extremos em \hat{V} .

Exemplo 1.5: Considerando novamente o grafo G da Fig. 1.1, os grafos F e H representados na Fig. 1.6 são exemplos de subgrafos próprios de G . O grafo H é o subgrafo induzido $G[\hat{V}]$ com $\hat{V} = \{1, 2, 3\}$. O grafo F não é um subgrafo induzido de G , porque $\{1, 2\} \subset V(F) = V(G)$, mas $12 \notin E(F)$ ainda que $12 \in E(G)$.

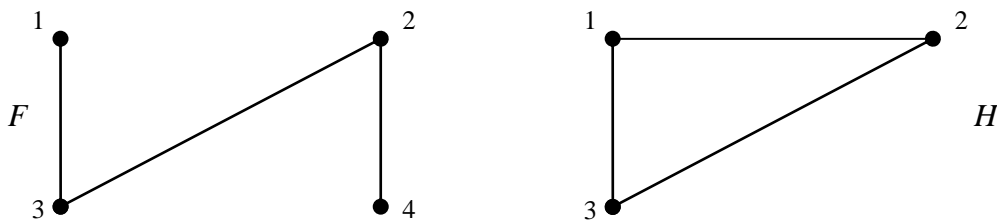


Fig. 1.6: Subgrafos próprios do grafo G da Fig. 1.1

Definição 1.11: Dado um grafo $G = (V(G), E(G))$, designa-se por *passeio* em G , toda a sequência não vazia de vértices e arestas

$$P = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_k$$

tal que $v_0, v_1, \dots, v_k \in V(G)$, $e_1, \dots, e_k \in E(G)$, e cada aresta e_i tem extremos v_{i-1} e v_i , para todo $i = 1, \dots, k$, sendo v_0 o vértice inicial e v_k o vértice final. Diz-se que P é um *trajeto* se todas as suas arestas forem distintas, e adicionalmente, diz-se que P é um *caminho* se todos os vértices v_i forem distintos com exceção, eventualmente dos vértices inicial e final.

Definição 1.12: Seja $P = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_k$ um trajeto em G . Diz-se que P é um *trajeto fechado* ou um *circuito*, se $v_0 = v_k$, por outro lado, designa-se por *caminho fechado* ou *ciclo*, um caminho P onde os únicos vértices que se repetem são o vértice inicial e o vértice final.

Exemplo 1.6: Considerando o grafo G da Fig. 1.1, $P = 1 e_1 2 e_3 3 e_5 4 e_4 2 e_1 1 e_2 3$ é um *passeio*, $T = 1 e_1 2 e_3 3 e_5 4 e_4 2$ é um *trajeto* e $C = 1 e_1 2 e_3 3 e_5 4$ é um *caminho*. Além disso $C_1 = 1 e_1 2 e_4 4 e_5 3 e_2 1$, no qual não há repetição de arestas e apenas se repetem os vértices final e inicial, é um *ciclo*.

Definição 1.13: Dado um passeio P de um grafo $G = (V(G), E(G))$, define-se *comprimento* de P e denota-se por $comp(P)$ como sendo o número de arestas (com eventual repetição) que o constitui.

Definição 1.14: Dados $v, u \in V(G)$, denota-se por $\mathcal{P}_{u,v}$ o conjunto de todos os caminhos de G , cujos vértices inicial e final são u e v . Designa-se por *distância* entre vértices de G a função $dist_G : V(G) \times V(G) \rightarrow \{0, \dots, v(G) - 1, \infty\}$ tal que:

$$dist_G(u, v) = \begin{cases} \min_{P \in \mathcal{P}_{u,v}} comp(P), & \text{se } \mathcal{P}_{u,v} \neq \emptyset \\ \infty, & \text{se } \mathcal{P}_{u,v} = \emptyset \end{cases}.$$

Definição 1.15: Dado um grafo G , designa-se por *cintura de G* e denota-se por $g(G)$ o comprimento do circuito de menor comprimento em G , caso tal exista. Se G não tem circuitos, diz-se que o grafo G tem cintura infinita e escreve-se $g(G) = \infty$.

Definição 1.16: Um grafo G diz-se *conexo*, se entre cada par de vértices distintos existe um caminho que os une. Um grafo que não é conexo diz-se *desconexo* ou *não conexo*.

Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo. Considere-se a relação de equivalência \sim definida em $V(G)$ por: $u \sim v$ se e só se existe um caminho que une os vértices u e v .

Definição 1.17: Se $G = (V(G), E(G))$ é um grafo e V_1, V_2, \dots, V_k são as classes de equivalência de \sim , cada subgrafo induzido $G[V_i]$, $1 \leq i \leq k$, designa-se por *componente conexa de G* ou, simplesmente, *componente de G* .

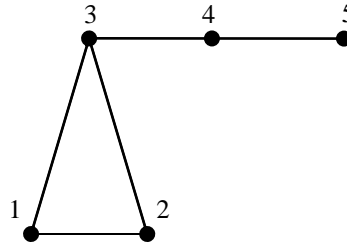


Fig. 1.7: Exemplo de um grafo conexo

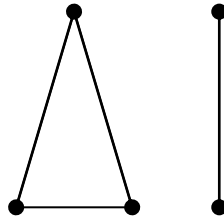


Fig. 1.8: Exemplo de um grafo desconexo formado por duas componentes conexas

Da Definição 1.17 decorre que uma componente de um grafo G é um subgrafo conexo maximal, no sentido em que não é subgrafo próprio de outro subgrafo conexo de G .

Definição 1.18: Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo e $v \in V(G)$ um vértice. A maior distância entre v e todos os outros vértices de G designa-se por *excentricidade* de v e denota-se por $e(v)$, isto é, $e(v) = \max_{u \in V(G)} \text{dist}_G(u, v)$. À maior excentricidade dos vértices de G dá-se o nome de *diâmetro* e denota-se por $\text{diam}(G)$; à menor excentricidade dos vértices de G dá-se o nome de *raio* e denota-se por $r(G)$, isto é, $\text{diam}(G) = \max_{u \in V(G)} e(u)$ e $r(G) = \min_{v \in V(G)} e(v)$.

Exemplo 1.7: Considerando o grafo da Fig. 1.7, calcule-se o seu diâmetro e raio. Para isso vê-se primeiro a excentricidade de cada vértice:

$$e(1) = \max_{u \in V} \text{dist}(1, u) = \max\{1, 1, 2, 3\} = 3,$$

$$e(2) = \max_{u \in V} \text{dist}(2, u) = \max\{1, 1, 2, 3\} = 3,$$

$$e(3) = \max_{u \in V} \text{dist}(3, u) = \max\{1, 1, 1, 2\} = 2,$$

$$e(4) = \max_{u \in V} \text{dist}(4, u) = \max\{2, 2, 1, 1\} = 2,$$

$$e(5) = \max_{u \in V} \text{dist}(5, u) = \max\{3, 3, 2, 1\} = 3,$$

logo, $\text{diam}(G) = \max_{u \in V(G)} e(u) = 3$ e $r(G) = \min_{v \in V(G)} e(v) = 2$. Além disso, a *cintura* de G é $g(G) = 3$ (é o comprimento do circuito de vértices 1, 2 e 3).

Definição 1.19: Um grafo $G = (V(G), E(G))$ diz-se *bipartido*, se existir uma partição do seu conjunto de vértices $V(G)$ nos conjuntos (não vazios) X e Y , tal que não existem arestas incidentes num par de vértices pertencentes ao mesmo elemento desta partição. Um tal grafo G denota-se por $G = (X, Y, E(G))$ e (X, Y) é uma *bipartição* de G . Se além disso, $|X| = p, |Y| = q$ e para todo o par de vértices $x \in X$ e $y \in Y$ o grafo G contém a aresta xy , diz-se que o grafo G é *bipartido completo de tipo* (p, q) , e denota-se $K_{p,q}$. Mais geralmente, um grafo $G = (V(G), E(G))$ diz-se *multipartido completo do tipo* (p_1, \dots, p_s) , e denota-se K_{p_1, \dots, p_s} , se existir uma partição do seu conjunto de vértices $V(G)$ em s conjuntos (não vazios) P_1, \dots, P_s , com p_1, \dots, p_s elementos, respetivamente, tal que para $1 \leq i, j \leq s$ e todo $x \in P_i$ e $y \in P_j$, $xy \in E(G)$, se $i \neq j$, e $xy \notin E(G)$, se $i = j$. Se $p_1 = \dots = p_s = p$, então G denota-se por $K_{s \times p}$.

O grafo \overline{G}_2 representado na Fig. 1.4 e o grafo F da Fig. 1.6 são bipartidos pois admitem as bipartições $V(\overline{G}_2) = (\{1, 2, 6\}, \{3, 4, 5\})$ e $V(F) = (\{1, 2\}, \{3, 4\})$. O grafo representado na Fig. 1.7 não é bipartido.

Proposição 1.1: Um grafo conexo G é bipartido se e só se não tem ciclos de comprimento ímpar.

Demonstração: Partindo do princípio que G é bipartido, se G não tiver ciclos então não há nada a demonstrar. Suponha-se que G tem um ciclo C_n formado pelas arestas $v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{s-1}v_s$ e que $v_0 \in X$. Então $v_1 \in Y$, $v_2 \in X$, e assim sucessivamente até chegar a v_s , ou seja, $v_i \in X$ se e somente se i é par ou $i = 0$. Como $v_0 = v_s$, s deve ser par. Desta forma, C_n tem um número par de arestas, logo tem comprimento par.

Para demonstrar o recíproco, seja $v_0 \in V(G)$ e considere-se a partição do conjunto de vértices $V(G)$ em dois subconjuntos X e Y , de tal modo que $v_0 \in Y$ e $v \in X$ se e somente se existe um caminho de comprimento ímpar de v_0 a v . Então X e Y são disjuntos. De facto, suponha-se que $X \cap Y \neq \emptyset$. Seja w o vértice de $X \cap Y$ com menor distancia a v_0 , C_1 um caminho de comprimento par de v_0 a w e C_2 um caminho de comprimento ímpar de v_0 a w . Se os únicos vértices comuns a C_1 e C_2 são v_0 e w , então C_1 e C_2 não se cruzam e $C_1 \cup C_2$ é um ciclo de comprimento ímpar, o que contradiz a hipótese de G ser um grafo sem ciclos de comprimento ímpar. Se os caminhos C_1 e C_2 se cruzam, então $C_1 \cap C_2$ contém outros vértices para além de v_0 e w . Seja $z \notin \{v_0, w\}$ o vértice de $C_1 \cap C_2$ mais próximo de w (no subgrafo constituído pelos vértices e arestas de C_1 e C_2). Seja C'_1 (resp., C'_2) o subcaminho de C_1 (resp., C_2) que une v_0 a z e C''_1 (resp., C''_2) o subcaminho de C_1 (resp., C_2) que une z a w . Tendo em conta que $comp(C_i) = comp(C'_i) + comp(C''_i)$, $i=1,2$, $comp(C_1)$ é par e $comp(C_2)$ é ímpar, então $comp(C'_1)$, $comp(C''_1)$ e $comp(C'_2)$ têm igual paridade e a paridade destes números é diferente da paridade de $comp(C''_2)$. Conclui-se assim que $C''_1 \cup C''_2$ é um ciclo de comprimento ímpar o que contradiz a hipótese de G ser um grafo sem ciclos de comprimento ímpar. ■

Do resultado anterior é imediato que um grafo é bipartido se e apenas se nenhuma componente conexa tem ciclos de comprimento ímpar.

1.2 Propriedades básicas da matriz de adjacência

Através das propriedades das matrizes associadas aos grafos, pode-se ter noção de muitas características dos grafos. Apresentam-se em seguida algumas propriedades da matriz de adjacência e a sua relação com a estrutura dos grafos. Estas propriedades encontram-se em textos sobre teoria das matrizes ou teoria espectral dos grafos (ver, por exemplo, [12] e [17]).

Definição 1.20: Seja A uma matriz quadrada de ordem n cujas entradas são números reais. O *polinómio característico* de A é o polinómio $P(A) = \det(xI - A)$, sendo I a matriz identidade de ordem n . Os *valores próprios* de A são os zeros do polinómio característico e um vetor $\hat{u} \neq 0$ diz-se um *vetor próprio* de A associado ao seu valor próprio λ se $A\hat{u} = \lambda\hat{u}$. O conjunto dos valores próprios de A designa-se por *espectro* de A e denota-se por $\sigma(A)$. A *multiplicidade* de um valor próprio λ de A é a multiplicidade de λ enquanto zero do polinómio característico.

Se G tem ordem n , a sua matriz de adjacência A_G é uma matriz de ordem n e o polinómio característico tem grau n , portanto, o número de vértices de G é igual ao número de valores próprios da sua matriz de adjacência. Como a matriz de adjacência de um grafo é uma matriz simétrica, então goza de todas as propriedades das matrizes hermíticas, em particular:

- todos os seus valores próprios são números reais;
- a multiplicidade de um valor próprio λ coincide com a dimensão do espaço vetorial gerado pelos vetores próprios de A_G associados a λ ;
- os vetores próprios associados a diferentes valores próprios são ortogonais;
- o $\text{tr}(A)$ coincide com a soma de todos os valores próprios, considerando a sua multiplicidade.

Para a proposição enunciada a seguir é necessária a noção de matriz irredutível. Uma matriz A de ordem $n > 1$ diz-se *redutível* se existe uma matriz de permutação P tal que:

$$P^T A P = \begin{bmatrix} X & 0 \\ Y & Z \end{bmatrix},$$

onde X é uma matriz de ordem r ($1 \leq r \leq n-1$) e Z é uma matriz de ordem $n-r$; se tal não for possível, A diz-se uma matriz *irredutível*. Se A é uma matriz simétrica redutível então $Y = 0$.

Do conhecido teorema de Frobenius (ver, por exemplo, [12]) sabe-se que se A é uma matriz irredutível de ordem n com entradas $a_{ij} \geq 0$ ($1 \leq i, j \leq n$), então o maior valor próprio de A é positivo e é um valor próprio simples (com multiplicidade um) com um vetor próprio com todas as entradas positivas. Como consequência imediata tem-se o seguinte resultado:

Proposição 1.2: Um grafo é conexo se e somente se o maior valor próprio da sua matriz de adjacência é um valor próprio simples com um vetor próprio positivo associado.

Proposição 1.3: Um grafo G é regular se e só se a sua matriz de adjacência tiver um vetor próprio com componentes todas iguais a um (que se denota por \hat{j}). Se G é um grafo k -regular então k é o maior valor próprio da matriz de adjacência de A_G e \hat{j} é um vetor próprio associado a este valor próprio.

Demonstração: Seja G um grafo, tal que $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Se G é k -regular então a soma dos elementos de qualquer linha de A_G é igual a k , pelo que $A_G \hat{j} = k \hat{j}$, isto é, A_G tem o vetor próprio \hat{j} associado ao valor próprio k . Reciprocamente, se G tem um vetor próprio \hat{j} associado a um valor próprio λ então:

$$A_G \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix},$$

concluindo-se que G é regular de grau $k = \lambda$ e \hat{j} é um vetor próprio associado ao valor próprio k da matriz de adjacência A_G . ■

1.3 Grafos fortemente regulares

Existem vários tipos de grafos que são classificados de acordo com as suas características, seja pelos graus dos vértices, conexidade, existência de determinadas subestruturas (por exemplo, ciclos), propriedades da matriz de adjacência, etc. Nesta secção considera-se uma classe especial de grafos regulares, denominados grafos fortemente regulares. Estes grafos foram introduzidos por R.C. Bose em [1]. No que se segue, serão apresentadas algumas propriedades básicas da estrutura destes grafos e da sua matriz de adjacência.

A bibliografia que serviu de base para a elaboração desta secção é [4] e [17], pontualmente são referidas outras fontes.

Definição 1.21: Um grafo G , não nulo e não completo, diz-se *fortemente regular* com parâmetros $(n,p;a,c)$ se G é p -regular ($p > 1$) e de ordem $n > 3$, todo o par de vértices adjacentes tem a vizinhos em comum e todo o par de vértices não adjacentes tem c vizinhos em comum.

Exemplo 1.8: O ciclo com 5 vértices, denota-se por C_5 e é um grafo fortemente regular com parâmetros $(5,2;0,1)$.

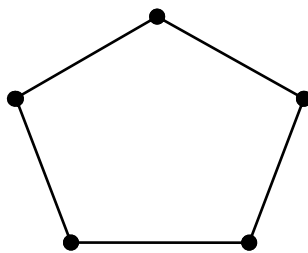


Fig. 1.9: O ciclo C_5 é um grafo fortemente regular com parâmetros $(5,2;0,1)$

O grafo representado na Fig. 1.10 designa-se por grafo de Petersen, e é um grafo fortemente regular com parâmetros $(10,3;0,1)$.

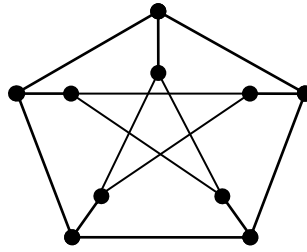


Fig. 1.10: O grafo de Petersen é um grafo fortemente regular com parâmetros $(10,3;0,1)$

Proposição 1.4: Se G é um grafo fortemente regular com parâmetros $(n,p;a,c)$, com $c > 0$, então $\text{diam}(G) = 2$.

Demonstração: Sejam u e v dois vértices de G não adjacentes. Da Definição 1.21 sabe-se que o número de vizinhos comuns entre eles é $|N_G(u) \cap N_G(v)| = c > 0$. Como u e v têm pelo menos um vizinho em comum, então $d_G(u, v) = 2$, concluindo-se que $\text{diam}(G) = 2$. ■

Os parâmetros de um grafo fortemente regular estão relacionados entre si de acordo com a seguinte proposição.

Proposição 1.5: Se G é um grafo fortemente regular com parâmetros $(n,p;a,c)$, então

$$p(p-1-a) = c(n-p-1). \quad (1.1)$$

Demonstração: Se G é um grafo fortemente regular com parâmetros $(n,p;a,c)$, pela Definição 1.21, todo o vértice u que é adjacente a v tem a vizinhos em comum com v . Logo, u é adjacente a exatamente $p-a-1$ vértices que não são adjacentes a v e, conseqüentemente, existem $p(p-a-1)$ arestas de G que unem vizinhos de v a outros vértices distintos de v e dos seus vizinhos. Por outro lado, se u não é adjacente a v , então u é adjacente a exatamente c vizinhos de v concluindo-se que o número de arestas que unem vizinhos de v a vértices que não são vizinhos de v é $(n-p-1)c$. Destes desenvolvimentos obtém-se a igualdade (1.1). ■

Exemplo 1.9: Considere-se o grafo de Petersen, representado na Fig. 1.10 que é um grafo fortemente regular com parâmetros $(10,3;0,1)$. Este grafo satisfaz a Proposição 1.4, tem diâmetro 2. Além disso, verifica-se $p(p-1-a) = 3(3-1-0) = 6$ e $c(n-p-1) = 1(10-3-1) = 6$, verificando-se a Proposição 1.5.

Proposição 1.6: Um grafo G é fortemente regular com parâmetros $(n,p;a,c)$ se e só se o seu complementar, \overline{G} , também é fortemente regular com parâmetros $(\overline{n}, \overline{p}; \overline{a}, \overline{c})$, onde

$$\begin{aligned}\overline{n} &= n, \\ \overline{p} &= n - p - 1, \\ \overline{a} &= n - 2 - 2p + c, \\ \overline{c} &= n - 2p + a.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Demonstração: Seja G um grafo fortemente regular com parâmetros $(n,p;a,c)$ e $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Seguindo um raciocínio semelhante ao descrito no Exemplo 1.4, se G tem ordem n e é p -regular, então o complementar \overline{G} tem ordem $\overline{n} = n$ e é \overline{p} -regular com $\overline{p} = n - p - 1$.

Considere-se o número de vizinhos comuns a dois vértices não adjacentes em \overline{G} . Se $v_i, v_j \in V(G)$ são tais que $v_i v_j \in E(G)$ então, em G , existem $p-a$ vizinhos de v_i que não são vizinhos de v_j , $p-a$ vizinhos de v_j , que não são vizinhos de v_i e a vértices de G que são vizinhos de ambos os vértices, v_i e v_j . Logo, existem $n - 2(p-a) - a = n - 2p + a$ vértices de G que não são vizinhos de v_i nem de v_j em G , portanto, são vizinhos de ambos os vértices em \overline{G} , logo $\overline{c} = n - 2p + a$.

Por último, considere-se o número de vizinhos comuns a dois vértices adjacentes em \overline{G} . Se $v_i, v_j \in V(G)$ são tais que $v_i v_j \notin E(G)$ então, em G , existem $p-c$ vizinhos de v_i , que não são vizinhos de v_j , $p-c$ vizinhos de v_j , que não são vizinhos de v_i e c vértices de G que são vizinhos de ambos os vértices, v_i e v_j . Logo, existem

$n - 2(p - c) - c - 2 = n - 2p + c - 2$ vértices de G que não são vizinhos de v_i nem de v_j em G , isto é, são vizinhos de ambos os vértices em \bar{G} , donde $\bar{a} = n - 2 - 2p + c$. ■

Definição 1.22: Um grafo fortemente regular G diz-se *primitivo* se tanto G como o seu complementar \bar{G} forem conexos, caso contrário designa-se por *imprimitivo*.

Proposição 1.7: Um grafo fortemente regular com parâmetros $(n, p; a, c)$ é imprimitivo se e só se $c = p$ ou $c = 0$.

Demonstração: Seja G um grafo fortemente regular com parâmetros $(n, p; a, c)$ e sejam $(n, \bar{p}; \bar{a}, \bar{c})$ os parâmetros do complementar \bar{G} obtidos de acordo com a Proposição 1.6. Da Definição 1.21, conclui-se que G é conexo se e apenas se $c > 0$. Adicionalmente, de (1.1) e (1.2) vem que $c = p > 0 \Leftrightarrow p - 1 - a = n - p - 1 \Leftrightarrow a = 2p - n \Leftrightarrow \bar{c} = 0$ o que é equivalente a afirmar que \bar{G} não é conexo. Consequentemente, G é um grafo fortemente regular imprimitivo se e só se $c = 0$ ou $c = p$. ■

Da Proposição 1.5 e da demonstração da Proposição 1.7 vem que um grafo fortemente regular com parâmetros $(n, p; a, c)$ é desconexo se e apenas se $c = 0$, ou seja, se $a = p - 1$. Estes grafos desconexos são a união de $r > 1$ grafos completos disjuntos K_{p+1} , onde $r = n/(p + 1)$, e denotam-se usualmente por rK_{p+1} . Os seus parâmetros são $(r(p + 1), p; p - 1, 0)$. Os complementares dos grafos rK_{p+1} são os grafos multipartidos completos $K_{r \times (p+1)}$. Da Proposição 1.6, conclui-se que os grafos $K_{r \times (p+1)}$ são grafos fortemente regulares com parâmetros $(r(p + 1), (r - 1)(p + 1); (r - 2)(p + 1), (r - 1)(p + 1))$. Estes grafos são os únicos grafos fortemente regulares para os quais $c = p$. Conclui-se, assim, que os grafos fortemente regulares imprimitivos são os grafos rK_p e os grafos $K_{r \times p}$, onde $r, p > 1$ para ambos os casos.

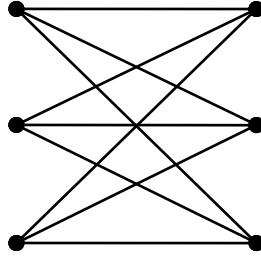


Fig. 1.11: $K_{3,3}$ é um grafo fortemente regular imprimitivo com parâmetro $(6,3;0,3)$

O ciclo C_5 e o grafo de Petersen, referidos no Exemplo 1.8, são dois exemplos de grafos fortemente regulares primitivos pois, em ambos $c = 1 \notin \{0, p\}$.

Proposição 1.8: Um grafo G , não nulo nem completo, é fortemente regular com parâmetros $(n, p; a, c)$ se e só se $A_G^2 = A_G \times A_G$ é uma combinação linear de A_G, I e J , onde I representa a matriz identidade de ordem n e J a matriz de ordem n cujas entradas são todas iguais a um.

Demonstração: Note-se que para um grafo arbitrário G , considerando A_G^2 com entradas $a_{ij}^{(2)}$ ($1 \leq i, j \leq n$), vem

$$a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj},$$

concluindo-se que $a_{ij}^{(2)}$ coincide com o número de passeios de comprimento dois entre os vértices i e j de G . Se G é um grafo fortemente regular com parâmetros $(n, p; a, c)$, então

$$a_{ij}^{(2)} = \begin{cases} p, & \text{se } i = j, \\ a, & \text{se } ij \in E(G), \\ c, & \text{se } ij \notin E(G), \end{cases}$$

ou seja, $A_G^2 = pI + aA_G + cA_{\bar{G}} = pI + aA_G + c(J - I - A_G)$, que é equivalente a

$$A_G^2 = (a - c)A_G + (p - c)I + cJ. \quad (1.3)$$

Reciprocamente, seja G um grafo de ordem n , não nulo e não completo, tal que $A_G^2 = \alpha_1 A_G + \alpha_2 I + \alpha_3 J$, com $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ números reais. Então,

$$a_{ij}^{(2)} = \begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3, & \text{se } i = j, \\ \alpha_1 + \alpha_3, & \text{se } ij \in E(G), \\ \alpha_3, & \text{se } ij \notin E(G). \end{cases}$$

Da Definição 1.21, vem que G é um grafo fortemente regular com parâmetros $(n, \alpha_2 + \alpha_3; \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_3)$. ■

Seja G um grafo fortemente regular primitivo com parâmetros $(n, p; a, c)$. Sendo G um grafo p -regular, da Proposição 1.3 vem que p é um valor próprio de A_G com o vetor próprio associado \hat{j} de componentes unitárias. Então se \hat{u} é um vetor próprio associado ao valor próprio $\lambda \neq p$ de A_G , de (1.3), obtém-se:

$$A_G^2 \hat{u} - (a - c)A_G \hat{u} - (p - c)\hat{u} - cJ\hat{u} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 \hat{u} - (a - c)\lambda \hat{u} - (p - c)\hat{u} - cJ\hat{u} = 0$$

e, como A_G é simétrica, (dos comentários da Secção 1.2) \hat{u} é ortogonal a \hat{j} ($\hat{u}^T \hat{j} = 0$), concluindo-se que

$$\lambda^2 - (a - c)\lambda - (p - c) = 0. \quad (1.4)$$

As raízes do polinómio quadrático (1.4) são os *valores próprios restritos de G* e denotam-se por λ_1 e λ_2 , isto é, $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(A_G) \setminus \{p\}$. Desta forma:

$$\lambda_1 = \frac{(a - c) - \sqrt{(a - c)^2 + 4(p - c)}}{2} \text{ e } \lambda_2 = \frac{(a - c) + \sqrt{(a - c)^2 + 4(p - c)}}{2} \quad (1.5)$$

Assim, pode-se concluir que:

$$\begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 = (c - p) \\ \lambda_1 + \lambda_2 = (a - c) \\ \lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{(a - c)^2 + 4(p - c)}. \end{cases}$$

As multiplicidades dos valores próprios restritos λ_1 e λ_2 , denotam-se por $m(\lambda_1)$ e $m(\lambda_2)$. Como G é conexo e p -regular, das Proposições 1.2 e 1.3, a multiplicidade do valor próprio p é um. No caso dos grafos fortemente regulares primitivos, pode-se afirmar que as multiplicidades dos valores próprios restritos satisfazem as seguintes igualdades:

$$\begin{cases} m(\lambda_1) + m(\lambda_2) = n - 1 \\ \lambda_1 m(\lambda_1) + \lambda_2 m(\lambda_2) = -p \end{cases} \quad (1.6)$$

em que a primeira igualdade vem do número de valores próprios coincidir com a ordem n de G e a segunda igualdade vem do traço da matriz de adjacência coincidir com a soma dos seus valores próprios (ver Secção 1.2).

Resolvendo o sistema (1.6), tem-se que:

$$\begin{cases} m(\lambda_1) = \frac{1}{2} \left((n-1) - \frac{2p + (n-1)(a-c)}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \\ m(\lambda_2) = \frac{1}{2} \left((n-1) + \frac{2p + (n-1)(a-c)}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \end{cases} \quad (1.7)$$

Exemplo 1.10: Considere-se novamente o grafo de Petersen. Este grafo fortemente regular imprimitivo tem como parâmetros $(10,3;0,1)$, como já se referiu, e os seus valores próprios restritos são dados por:

$$\lambda_1 = \frac{(a-c) - \sqrt{(a-c)^2 + 4(p-c)}}{2} = \frac{(0-1) - \sqrt{(0-1)^2 + 4(3-1)}}{2} = \frac{-1-3}{2} = -2$$

e

$$\lambda_2 = \frac{(a-c) + \sqrt{(a-c)^2 + 4(p-c)}}{2} = \frac{(0-1) + \sqrt{(0-1)^2 + 4(3-1)}}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1,$$

com multiplicidades:

$$m(\lambda_1) = \frac{1}{2} \left((n-1) + \frac{2p + (n-1)(a-c)}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) = \frac{1}{2} \left((10-1) + \frac{2 \cdot 3 + (10-1)(0-1)}{(-2-1)} \right) = 4$$

e

$$m(\lambda_2) = \frac{1}{2} \left((n-1) - \frac{2p + (n-1)(a-c)}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) = \frac{1}{2} \left((10-1) - \frac{2 \cdot 3 + (10-1)(0-1)}{(-2-1)} \right) = 5.$$

No contexto dos grafos fortemente regulares, um dos problemas estudados é o de saber se para um dado conjunto de parâmetros existem grafos fortemente regulares com esses parâmetros. Na Proposição 1.5 conclui-se que os parâmetros de um grafo fortemente regular estão relacionados entre si, através da igualdade $p(p-1-a) = c(n-p-1)$ e, consequentemente, existem restrições relativamente aos valores dos parâmetros $(n, p; a, c)$ que possam estar associados a grafos fortemente regulares. Outra restrição sobre os valores dos parâmetros obtém-se das expressões (1.7) obtidas para as multiplicidades dos valores próprios restritos. Como estes valores são inteiros positivos, então uma condição necessária sobre os parâmetros de um grafo fortemente regular é

$$\frac{1}{2} \left[(n-1) \pm \frac{2p + (n-1)(a-c)}{\sqrt{(a-c)^2 + 4(p-c)}} \right] \in \mathbb{N}.$$

Esta condição é conhecida na literatura de língua inglesa por *integrality conditions* (ver por exemplo, [14]) e *rationality conditions* (ver, por exemplo, [3]). Como os valores próprios dos grafos fortemente regulares e respetivas multiplicidades são obtidos a partir dos parâmetros $(n, p; a, c)$ (ver (1.5) e (1.7)), estas restrições são muitas vezes impostas sobre os valores próprios restritos ou sobre as suas multiplicidades. Para além das condições anteriores, consideram-se aqui outras duas condições necessárias:

- as condições de Krein (obtidas em [18]):

$$\begin{aligned} (\lambda_1 + 1)(p + \lambda_1 + 2\lambda_1\lambda_2) &\leq (p + \lambda_1)(\lambda_2 + 1)^2, \\ (\lambda_2 + 1)(p + \lambda_2 + 2\lambda_1\lambda_2) &\leq (p + \lambda_2)(\lambda_1 + 1)^2; \end{aligned}$$

- e os limites absolutos de Seidel (obtidos em [8]):

$$n \leq \frac{1}{2} m(\lambda_1)(m(\lambda_1) + 3),$$

$$n \leq \frac{1}{2} m(\lambda_2)(m(\lambda_2) + 3).$$

As demonstrações destas condições são omitidas neste texto por saírem do âmbito deste trabalho.

O conjunto de parâmetros $(n, p; a, c) = (28, 9; 0, 4)$ ao qual correspondem (por (1.5) e (1.7)) $\lambda_1 = -5, \lambda_2 = 1, m(\lambda_1) = 6$ e $m(\lambda_2) = 21$, não satisfaz as condições de Krein:

$$(\lambda_1 + 1)(p + \lambda_1 + 2\lambda_1\lambda_2) = 24,$$

$$(p + \lambda_1)(\lambda_2 + 1)^2 = 16,$$

mas $24 > 16$! Este conjunto de parâmetros também não satisfaz os limites absolutos de Seidel:

$$\frac{1}{2} m(\lambda_1)(m(\lambda_1) + 3) = 27,$$

mas $n = 28 > 27$! Consequentemente, não existe um grafo fortemente regular com parâmetros $(28, 9; 0, 4)$.

O grafo fortemente regular com parâmetros $(10, 3; 0, 1)$ (grafo de Petersen), ao qual correspondem $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, m(\lambda_1) = 4$ e $m(\lambda_2) = 5$, verifica as condições de Krein pois,

$$3 = (\lambda_1 + 1)(p + \lambda_1 + 2\lambda_1\lambda_2) \leq (p + \lambda_1)(\lambda_2 + 1)^2 = 4,$$

e

$$0 = (\lambda_2 + 1)(p + \lambda_2 + 2\lambda_1\lambda_2) \leq (p + \lambda_2)(\lambda_1 + 1)^2 = 4.$$

Também verifica a condição dos limites absolutos de Seidel, pois

$$10 = n \leq \frac{1}{2} m(\lambda_1)(m(\lambda_1) + 3) = 14 \text{ e } 10 = n \leq \frac{1}{2} m(\lambda_2)(m(\lambda_2) + 3) = 20.$$

Capítulo II: *Designs* combinatórios

Os *designs* são estruturas combinatórias com elevado grau de regularidade que têm a sua origem nos anos 30, na estatística, através dos trabalhos de R. A. Fisher e F. Yates no planeamento de experiências na agricultura.

Um exemplo muito conhecido relata o problema de uma companhia de cafés que pretendia comparar um certo número de marcas de café. Para isso, pretendia-se que cada pessoa experimentasse o mesmo número de marcas, de modo a que cada pessoa tenha o mesmo peso na decisão e, cada conjunto de marcas fosse experimentado pelo mesmo número de pessoas, de modo que cada variedade tivesse o mesmo tratamento. Este procedimento que visava uniformizar o tratamento de todas as marcas evitava que uma pessoa tivesse que provar todos os cafés.

Para além da estatística, as aplicações dos *designs* estenderam-se a outras áreas da matemática como as geometrias finitas, teoria dos grupos, códigos, etc.

Neste capítulo estudam-se definições e algumas propriedades dos *designs* combinatórios. A principal referência é [5].

2.1 *Designs* combinatórios

Considere-se uma definição geral de t -*design*.

Definição 2.1: Seja $X \neq \emptyset$ um conjunto com v elementos e $B \neq \emptyset$ uma colecção de b subconjuntos distintos de X com cardinalidade $k > 0$. O par (X, B) designa-se por t -*design* com parâmetros (v, k, λ) , onde $0 < t < k < v$ e $\lambda > 0$, se cada subconjunto de cardinalidade t está contido em exactamente λ elementos de B . Os elementos de B designam-se, usualmente, por *blocos*.

Exemplo 2.1: Seja X um conjunto finito com $v > 0$ elementos e seja B o conjunto de todos os subconjuntos de X com k elementos. O par (X, B) assim obtido é um t -*design*, para $0 < t < k$, usualmente designado (por exemplo, em [6]) por *full combinatorial design*.

Cada subconjunto de cardinalidade t está contido em λ blocos, sendo $\lambda = \binom{v-t}{k-t}$.

Concretizando para $v = 5$, $X = \{1,2,3,4,5\}$ e $B = \{\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{1,3,4\}, \{1,3,5\}, \{1,4,5\}, \{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{2,4,5\}, \{3,4,5\}\}$, conclui-se que o par (X, B) é um t -design com parâmetros $(5,3,\lambda)$, e,

- se $t = 1$, qualquer elemento pertence a $\lambda = \binom{5-1}{3-1} = 6$ blocos, isto é, trata-se de um 1-design com parâmetros $(5,3,6)$;
- se $t = 2$, qualquer par de elemento pertence a $\lambda = \binom{5-2}{3-2} = 3$ blocos, ou seja, (X, B) é um 2-design com parâmetros $(5,3,3)$.

Exemplo 2.2: O par (X, B) com $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ e com o conjunto de blocos $B = \{\{1,2,5,6\}, \{3,4,7,8\}, \{1,3,5,7\}, \{2,4,6,8\}, \{1,4,5,8\}, \{2,3,6,7\}, \{1,2,3,4\}, \{5,6,7,8\}, \{1,2,7,8\}, \{3,4,5,6\}, \{1,3,6,8\}, \{2,4,5,7\}, \{1,4,6,7\}, \{2,3,5,8\}\}$ é um 3-design com parâmetros $(8,4,1)$, isto é, a cardinalidade de X é $v = 8$, cada bloco de B é formado por quatro elementos, encontrando-se cada subconjunto de três elementos de X em apenas um bloco. Este 3-design, que está representado na Fig. 2.1, é um exemplo particular de um 3-design de Hadamard (família dos 3-design com parâmetros $(4n, 2n, n-1)$) [16].

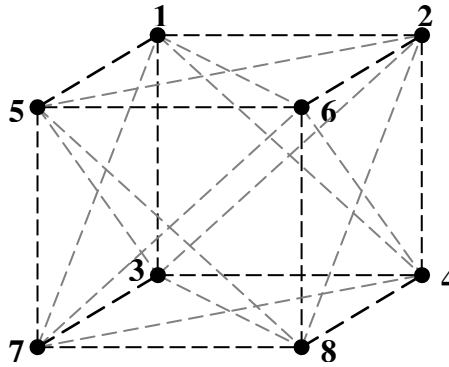


Fig. 2.1: Exemplo de um 3-design com parâmetros $(8,4,1)$, um 3-design de Hadamard.

Exemplo 2.3: Seja $X = \{a,b,c,d\}$ com $B = \{\{a,b,c\}, \{b,c,d\}, \{a,c,d\}, \{a,b,d\}\}$. O par (X, B) é um 2-design com parâmetros $(4,3,2)$, representado na Fig. 2.2.

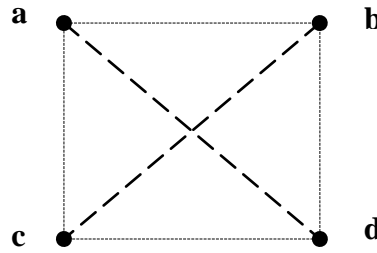


Fig. 2.2: Uma representação de um 2-design com parâmetros $(4,3,2)$

O exemplo anterior descreve um 2-design. Neste trabalho tem especial interesse o estudo deste tipo de designs. Fazendo $t = 2$ na Definição 2.1, define-se (v, k, λ) -design do seguinte modo:

Definição 2.2: Seja $X \neq \emptyset$ um conjunto com v elementos e $B \neq \emptyset$ uma coleção de subconjuntos distintos de X com cardinalidade b . O par (X, B) designa-se por design com parâmetros (v, k, λ) , onde $2 < k < v$ e $\lambda > 0$, e escreve-se (v, k, λ) -design, se:

1. cada elemento de B contém exatamente k elementos;
2. cada par de elementos de B está contido em exatamente λ blocos.

Exemplo 2.4: Considere-se o conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ com $B = \{\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 7\}, \{1, 5, 6\}, \{2, 6, 7\}, \{1, 3, 7\}\}$. O par (X, B) é um $(7, 3, 1)$ -design.

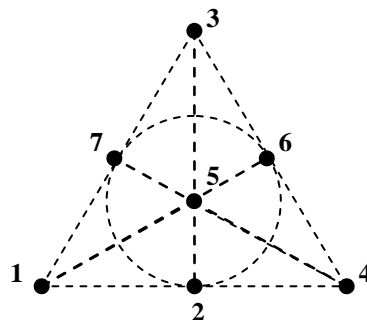


Fig. 2.3: Uma representação de um $(7,3,1)$ -design.

Nos resultados que se seguem estabelecem-se algumas relações entre os parâmetros de um (v, k, λ) -design.

Proposição 2.1: Se (X, B) é um (v, k, λ) -design, então cada elemento de X pertence a r blocos, onde

$$bk = rv \quad (2.1)$$

e

$$r(k-1) = \lambda(v-1). \quad (2.2)$$

Demonstração: Observe-se que a cardinalidade do conjunto $C = \{(x, B') : x \in B', B' \in B\}$, pode ser obtida de duas maneiras diferentes: para cada $x \in X$, o bloco B' pode ser escolhido de r maneiras, logo vr é a cardinalidade de C ; por outro lado, para cada um dos blocos B' , o elemento x pode ser escolhido de k maneiras, logo a cardinalidade de C é, também, bk . Daqui conclui-se (2.1).

Prove-se, agora, a igualdade (2.2). Em cada um dos b blocos podem ser escolhidos pares de elementos de $\binom{k}{2}$ maneiras diferentes e, por outro lado, há $\binom{v}{2}$ pares de elementos que pertencem a, exatamente, λ blocos, logo $b\binom{k}{2} = \lambda\binom{v}{2}$, ou seja, $bk(k-1) = \lambda v(v-1)$. Conjugando com (2.1), obtém-se (2.2). ■

A Proposição 2.1 mostra que os parâmetros de um design não são independentes. Além disso, os parâmetros b (número de blocos) e r (número de blocos a que cada elemento pertence) associados a um (v, k, λ) -design podem facilmente obter-se a partir do conhecimento de v , k e λ :

$$r = \lambda \frac{(v-1)}{(k-1)} \quad \text{e} \quad b = \lambda \frac{v(v-1)}{k(k-1)}$$

Uma questão básica é saber para que valores de v , k e λ existe um (v, k, λ) -design. De acordo com a proposição anterior não existem designs com parâmetros que não satisfaçam as relações indicadas. Por exemplo, não existe um $(11, 6, 2)$ -design, visto que da igualdade (2.2) vem $r = 4$ e de (2.1), resulta $b = \frac{11 \times 4}{6}$ que não é um número inteiro.

Um (v, k, λ) -*design* com $k = 2$ e $\lambda = 1$ (o que implica, por (2.1) e (2.2), que $r = v - 1$ e $b = \frac{1}{2}v(v - 1)$) tem uma representação compatível com a do grafo completo K_v na teoria dos grafos. Embora como *design* esta estrutura combinatória não seja muito interessante, é uma classe de grafos regulares importante.

Veja-se o caso particular $t = 1$.

Proposição 2.2: Existe um 1 -*design* com parâmetros (v, k, λ) se e só se

$$k \mid \lambda v \text{ e } \frac{\lambda v}{k} \leq \binom{v}{k}. \quad (2.3)$$

Demonstração: Suponha-se que existe um 1 -*design* com parâmetros (v, k, λ) . Então,

$\sum_{x \in X} \lambda = k|B|$, de onde se obtém a igualdade $v\lambda = kb$, onde vem que o número de blocos é

dado por $b = \frac{v\lambda}{k}$. Como o número total de blocos é, no máximo, $\binom{v}{k}$, tem-se que

$b = \frac{v\lambda}{k} \leq \binom{v}{k}$. Reciprocamente, seja X um conjunto de cardinalidade v e sejam $v, k, \lambda \in \mathbb{N}$

tais que $k \mid \lambda v$ e $\frac{v\lambda}{k} \leq \binom{v}{k}$. Seja \mathcal{B} uma família de $\frac{\lambda v}{k}$ subconjuntos distintos de X com

cardinalidade k e, para $x \in X$, seja $r(x)$ o número de elementos de \mathcal{B} que contêm x . Então

$$\sum_{x \in X} r(x) = |\mathcal{B}|k = \lambda v. \quad (2.4)$$

Se $r(x) = \lambda$ para todo o $x \in X$, então o par (X, \mathcal{B}) é um 1 -*design* com parâmetros (v, k, λ) , caso contrário, de (2.4) conclui-se que existem $x_1, x_2 \in X$ tais que

$$r(x_1) > \lambda > r(x_2).$$

Seja $r_{1\bar{2}}$ o número de blocos que contêm x_1 e não contêm x_2 , $r_{\bar{1}2}$ o número de blocos que contêm x_2 e não contêm x_1 e r_{12} o número de blocos que contêm x_1 e x_2 . Então

$$r_{1\bar{2}} = r(x_1) - r_{12} \text{ e } r_{\bar{1}2} = r(x_2) - r_{12}.$$

Consequentemente, $r_{1\bar{2}} - r_{\bar{1}2} = r(x_1) - r(x_2) > 0$.

O procedimento descrito a seguir tem com objetivo, aumentar em um o número de blocos que contêm x_2 e diminuir em um o número de blocos que contêm x_1 . Seja $J_{1\bar{2}}$ o conjunto dos índices (j) dos blocos $B_j \in \mathcal{B}$ que contêm x_1 mas não contêm x_2 e, para $j \in J_{1\bar{2}}$, seja

$$B_j^* = (B_j \setminus \{x_1\}) \cup \{x_2\}.$$

Os $r_{1\bar{2}}$ blocos B_j^* contêm x_2 e não contêm x_1 e, como $r_{1\bar{2}} > r_{\bar{1}2}$, existe pelo menos um B_j^* que não pertence à coleção original (\mathcal{B}) . Seja $B_{j^*}^*$ um tal bloco. Removendo B_j de \mathcal{B} e substituindo-o por $B_{j^*}^*$ obtêm-se uma nova família de blocos, \mathcal{B}^* , tal que o número de blocos que contêm x é dado por

$$r^*(x) = \begin{cases} r(x) - 1, & \text{se } x = x_1, \\ r(x) + 1, & \text{se } x = x_2, \\ r(x), & \text{se } x \notin \{x_1, x_2\}. \end{cases}$$

Se $r^*(x) = \lambda$ para todo o $x \in X$ então o par (X, \mathcal{B}^*) é um 1 -design e o problema está resolvido, caso contrário, o procedimento repete-se.

Deste modo, como o número de elementos de X e o número de blocos são finitos, repetindo este procedimento um número finito de vezes, obtêm-se um conjunto de blocos tais que o número de blocos que contém cada elemento de X é igual a λ , isto é, $r(x) = \lambda$ para todo o $x \in X$. ■

Exemplo 2.5: Neste exemplo recorre-se à técnica de construção de *1-designs*, descrita na demonstração anterior, para a construção de um *1-design* com parâmetros $(10,6,3)$. Note-se que um tal *design* existe pois $6 \mid 3 \times 10$ e $\frac{3 \times 10}{6} \leq \binom{10}{6}$. Considere-se, então, uma família de $\frac{3 \times 10}{6} = 5$ subconjuntos de $X = \{1,2,\dots,10\}$ com cardinalidade seis, ou seja, $B = \{B_1, B_2, \dots, B_5\}$, representada pela seguinte tabela:

x	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$r(x)$
1	1	0	1	1	0	3
2	1	0	0	1	0	2
3	1	0	1	0	1	3
4	1	0	0	1	1	3
5	1	1	1	0	1	4
6	1	1	0	1	1	4
7	0	1	1	0	1	3
8	0	1	0	1	1	3
9	0	1	1	0	0	2
10	0	1	1	1	0	3

Note-se que $r(x_5) = 4 > \lambda = 3 > r(x_2) = 2$ e que $\mathcal{J}_{52}^- = \{2,3,5\}$, sendo \mathcal{J}_{52}^- o conjunto dos índices dos blocos que contêm x_5 e não contêm x_2 . Para $j \in \mathcal{J}_{52}^-$, considere-se $B_j^* = (B_j \setminus \{5\}) \cup \{2\}$:

$$B_2^* = \{2,6,7,8,9,10\}, \quad B_3^* = \{1,2,3,7,9,10\} \text{ e } B_5^* = \{2,3,4,6,7,8\}.$$

Fazendo, por exemplo, $B_{j^*} = B_2^*$ e substituindo em \mathcal{B} , B_2 por B_2^* (mantendo B_3 e B_5) obtém-se:

X	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$r(x)$
1	1	0	1	1	0	3
2	1	1	0	1	0	3
3	1	0	1	0	1	3
4	1	0	0	1	1	3
5	1	0	1	0	1	3
6	1	1	0	1	1	4
7	0	1	1	0	1	3
8	0	1	0	1	1	3
9	0	1	1	0	0	2
10	0	1	1	1	0	3

Verifica-se que $r(x_6) = 4 > \lambda = 3 > r(x_9) = 2$ e que $\mathcal{L}_{69} = \{1, 4, 5\}$. Fazendo, $B_j^* = (B_j \setminus \{6\}) \cup \{9\}$ para $j \in \mathcal{L}_{69}$ obtém-se:

$$B_1^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}, B_4^* = \{1, 2, 4, 8, 9, 10\} \text{ e } B_5^* = \{3, 4, 5, 7, 8, 9\}.$$

Considerando, por exemplo, $B_{j^*}^* = B_1^*$ e substituindo B_1 por B_1^* (mantendo B_4 e B_5) obtém-se:

X	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$r(x)$
1	1	0	1	1	0	3
2	1	1	0	1	0	3
3	1	0	1	0	1	3
4	1	0	0	1	1	3
5	1	0	1	0	1	3
6	0	1	0	1	1	3
7	0	1	1	0	1	3
8	0	1	0	1	1	3
9	1	1	1	0	0	3
10	0	1	1	1	0	3

Como para todo o $x \in X$, $r(x) = 3$, conclui-se que a família de blocos $B^* = \{\{1,2,3,4,5,9\}, \{2,6,7,8,9,10\}, \{1,3,5,7,9,10\}, \{1,2,4,6,8,10\}, \{3,4,5,6,7,8\}\}$ forma um 1 -design (X, B^*) com parâmetros $(10, 6, 3)$.

Um resultado mais geral do que a Proposição 2.1, válido para um qualquer t -design, é o seguinte:

Proposição 2.3: Se (X, B) é um t -design com parâmetros (v, k, λ) , com $0 < t < k < v$ e $\lambda > 0$, então o número de blocos b é dado por:

$$b \binom{k}{t} = \lambda \binom{v}{t}. \quad (2.5)$$

Demonstração: A igualdade (2.5) obtém-se contando o número de todos os t -subconjuntos de X existentes em todos os blocos por duas maneiras. Por um lado, existem $\binom{v}{t}$ t -subconjuntos de X , cada um dos quais está contido em λ blocos e, por outro lado, existem b blocos, cada um com $\binom{k}{t}$ t -subconjuntos. Tem-se, então, que,

$$b \binom{k}{t} = \lambda \binom{v}{t}. \quad \blacksquare$$

Uma classe de *designs* de especial interesse é a dos *designs* para os quais o número de pontos é igual ao número de blocos.

Definição 2.3: Um (v, k, λ) -design (X, B) diz-se *simétrico* se $|B| = v$.

Da igualdade (2.1) e da Definição 2.3, pode-se concluir que se um (v, k, λ) -design é simétrico, então também $k = r$.

Exemplo 2.6: Os *designs* referidos nos Exemplos 2.3 e 2.4 são *designs simétricos*.

Definição 2.4: Um t -*design* com parâmetros $(v, k, 1)$ designa-se por *sistema de Steiner* e denota-se por $S(t, v, k)$.

De acordo com [10] o maior t para o qual são conhecidos sistemas de Steiner, é $t = 5$, e esses sistemas são: $S(5, 12, 6)$, $S(5, 24, 6)$, $S(5, 24, 8)$, $S(5, 28, 7)$, $S(5, 36, 6)$, $S(5, 48, 6)$, $S(5, 72, 6)$, $S(5, 84, 6)$, $S(5, 108, 6)$, $S(5, 132, 6)$, $S(5, 168, 6)$ e $S(5, 244, 6)$.

Proposição 2.4: Qualquer sistema de Steiner, $S(t, v, k)$, verifica

$$v \geq (t+1)(k-t+1).$$

Demonstração: Num sistema de Steiner quaisquer dois blocos distintos têm, no máximo, $t-1$ pontos em comum. Escolha-se um conjunto, A , de $t+1$ pontos não pertencentes a um bloco. Para cada subconjunto de A com t elementos, existe um único bloco que o contém, e que contém $k-t$ pontos que não pertencem a A . Além disso, qualquer ponto não pertencente a A pertence no máximo a um único destes blocos (já que dois blocos têm $t-1$ pontos de A em comum). Portanto, a união de todos estes blocos que contêm t pontos de A tem $(t+1) + (t+1)(k-t)$ elementos, ou seja, $(t+1)(k-t+1)$ elementos. ■

Definição 2.5: Um sistema de Steiner $S(2, v, 3)$ designa-se por *sistema de triplos de Steiner* com ordem v , e denota-se por $STS(v)$.

Um sistema de triplos de Steiner $STS(v)$ é, portanto, um $(v, 3, 1)$ -*design*.

Um problema muito conhecido na Teoria dos *designs* combinatórios é o problema das quinze alunas proposto por T. P. Kirkman (*Kirkman schoolgirls problem*) em [13]:

Como pode uma classe de quinze raparigas realizar uma caminhada diária, caminhando em filas de três, de modo a que duas raparigas partilhem a mesma fila uma só vez em cada semana (sete dias)?

Este problema reduz-se às questões de existência e construção de um $(15,3,1)$ -*design*, ou seja, de um sistema de triplos de Steiner $STS(15)$. A resposta à questão de existência será dada já a seguir.

Na proposição seguinte apresenta-se uma condição necessária para a existência de sistemas de triplos de Steiner. Esta condição é também suficiente mas a sua demonstração envolve a construção dos referidos triplos de Steiner, assunto que sai fora do âmbito deste trabalho [11].

Proposição 2.5: Uma condição necessária para que exista um sistema de triplos de Steiner de ordem v , com $v \geq 3$, é que $v \equiv 1 \pmod{6}$ ou $v \equiv 3 \pmod{6}$.

Demonstração: Como consequência da Proposição 2.1, o número de blocos de um sistema de triplos de Steiner é dado por $b = v(v-1)/6$, visto que $\lambda = 1$ e $k = 3$. Para todo o x pertencente a X , os triplos (blocos) que contêm x contêm também um subconjunto de X com dois elementos cuja união é uma partição de $X \setminus \{x\}$, donde se conclui que $|X \setminus \{x\}| = v-1$ tem que ser par. Portanto, v tem que ser ímpar e $v(v-1)$ tem que ser múltiplo de 6, se $v(v-1)$ é múltiplo de seis então pode ocorrer uma das seguintes situações:

- i. v é múltiplo de 6;
- ii. $v-1$ é múltiplo de 6;
- iii. v é múltiplo de 3 e $v-1$ é múltiplo de 2 (o contrário não pode ser por causa das paridades).

Ora, i. não pode acontecer porque v é ímpar. De ii. vem necessariamente $v \equiv 1 \pmod{6}$, e finalmente, de acordo com iii. só se podem considerar os múltiplos de 3 que sejam ímpares, então $v = 3(2k-1)$, logo $v \equiv 3 \pmod{6}$. Em conclusão, $v \equiv 1 \pmod{6}$ ou $v \equiv 3 \pmod{6}$. ■

Tem-se, como consequência desta proposição, que o menor $STS(v)$ tem ordem $v = 7$ é o $(7,3,1)$ -*design* referido no Exemplo 2.4.

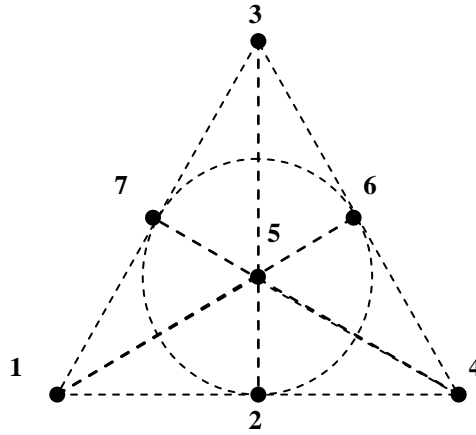


Fig. 2.4: O $(7,3,1)$ -design, é o menor Triplo de Steiner, $STS(7)$.

Exemplo 2.7: (*Sistemas de triplos de Steiner*) A decomposição do grafo completo K_9 em triângulos K_3 que não partilham arestas, dá origem a um sistema de triplos de Steiner $STS(9)$. Pode-se enumerar os blocos pelas etiquetas dos seus vértices:

$$\{\{1,2,3\}, \{1,4,5\}, \{1,6,7\}, \{1,8,9\}, \{2,4,6\}, \{2,5,8\}, \{2,7,9\}, \{3,4,9\}, \{3,5,7\}, \{3,6,8\}, \{4,7,8\}, \{5,6,9\}\}.$$

Cada par de pontos pertence a um único bloco, como se pode ver na Fig. 2.5.

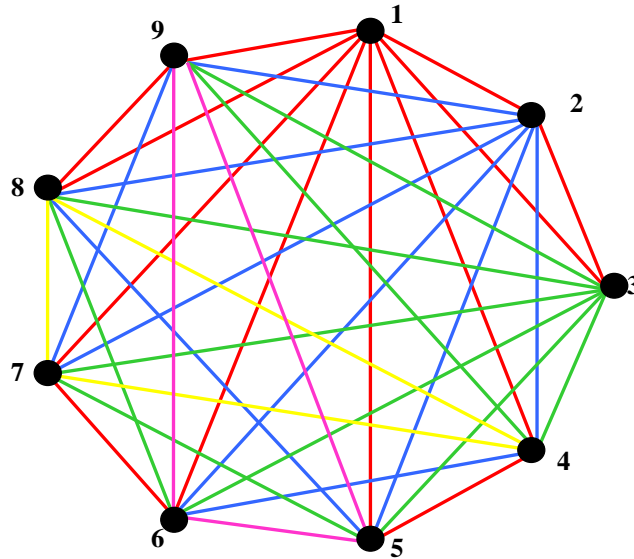


Fig. 2.5: Representação de um sistema de triplos de Steiner, $STS(9)$

2.2 Matriz de incidência de um design

Definição 2.6: A matriz de incidência de um design (X, B) é uma matriz $N = [n_{ij}]$ tal que cada linha está associada a um elemento do conjunto X , e cada coluna corresponde a um bloco de B ; cada entrada n_{ij} é igual a um se $x_i \in B_j$ e é igual a zero no caso contrário. Nestas condições, a soma das entradas de cada linha i é o número de ocorrências de i nos diferentes blocos (r), e a soma das entradas de cada coluna B_j , é a cardinalidade k de cada bloco.

x_i	B_1	B_2	\dots	B_j	$\sum_j n_{ij}$
	$\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$	$\{x_2, x_3, \dots, x_{k+1}\}$	\dots	$\{x_1, x_2, \dots, x_j\}$	
x_1	1	0	\dots	1	r
x_2	1	1	\dots	1	r
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	r
x_k	1	\dots	\dots	\dots	r
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	r
x_j	0	0	\dots	1	r
$\sum_i n_{ij}$	k	k	\dots	k	

Exemplo 2.8: A matriz de incidência do $(4,3,2)$ – design do Exemplo 2.3 é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.9: A matriz de incidência do 1 -design com parâmetros $(10,6,3)$, obtido no Exemplo 2.5 é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Proposição 2.6: Se N é a matriz de incidência de um (v, k, λ) -design, então:

$$NN^T = (r - \lambda)I + \lambda J$$

onde I é a matriz identidade de ordem v e J é a matriz quadrada de ordem v com todas as entradas iguais a um.

Demonstração: Este resultado é consequência da Definição 2.2 de (v, k, λ) -design, pois

$$(NN^T)_{ij} = \begin{cases} r, & \text{se } i = j \\ \lambda, & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

■

Proposição 2.7: (*Desigualdade de Fischer*) Se (X, B) é um (v, k, λ) -design, então o número de blocos b é tal que

$$b \geq v.$$

Demonstração: Seja N a matriz de incidência do (v, k, λ) -design. Então NN^T é uma matriz quadrada de ordem v . Calculando o seu determinante,

$$\det(NN^T) = \det \begin{bmatrix} r & \lambda & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & r & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & \lambda & r & \dots & \lambda \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ \lambda & \lambda & \lambda & \dots & r \end{bmatrix}.$$

Substituindo a primeira linha pela soma de todas as linhas, obtém-se

$$\begin{aligned} \det(NN^T) &= \det \begin{bmatrix} r + \lambda(v-1) & r + \lambda(v-1) & r + \lambda(v-1) & . & . & . & r + \lambda(v-1) \\ \lambda & r & \lambda & . & . & . & \lambda \\ \lambda & \lambda & r & . & . & . & \lambda \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \lambda & \lambda & \lambda & . & . & . & r \end{bmatrix} \\ &= (r + \lambda(v-1)) \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ \lambda & r & \lambda & . & . & . & \lambda \\ \lambda & \lambda & r & . & . & . & \lambda \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \lambda & \lambda & \lambda & . & . & . & r \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Subtraindo a primeira coluna a cada uma das restantes, tem-se:

$$\det(NN^T) = (r + \lambda(v-1)) \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & r - \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \lambda & 0 & r - \lambda & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ \lambda & 0 & 0 & \dots & r - \lambda \end{bmatrix} = (r + \lambda(v-1))(r - \lambda)^{v-1}.$$

De (2.2), $r = \lambda \frac{(v-1)}{(k-1)}$, obtendo-se $\det(NN^T) = rk(r-\lambda)^{v-1}$ e, novamente por (2.2),

$v > k$ implica $r > \lambda$, concluindo-se que $\det(NN^T) \neq 0$ e, portanto, a característica de NN^T é v . Assim, dado que a característica de NN^T é não superior à característica de N que, por sua vez, é não superior ao seu número de colunas b , tem-se que $v \leq b$. ■

2.3 Designs quasi-simétricos

Nesta secção segue-se [3].

Definição 2.7: Seja (X, B) um (v, k, λ) -design. Diz-se que o par (X, B) é um *design quasi-simétrico* se existem $x, y \in \mathbb{N}_0$ ($x \neq y$) tais que

$$|B_i \cap B_j| \in \{x, y\}$$

para quaisquer blocos distintos $B_i, B_j \in B$.

Considere-se o grafo $G = (B, E)$ onde B é o conjunto de blocos de um *design quasi-simétrico* e dois blocos B_i e B_j são adjacentes se $|B_i \cap B_j| = x$. Designa-se este grafo por *grafo dos blocos do design*.

Proposição 2.8: O grafo dos blocos de um *design quasi-simétrico* é fortemente regular.

Demonstração: Seja (X, B) um (v, k, λ) -design *quasi-simétrico* tal que a intersecção de quaisquer dois blocos distintos tem x ou y elementos. Seja A a matriz de adjacência do grafos dos blocos (onde os blocos B_i e B_j são adjacentes se $i \neq j$ e $|B_i \cap B_j| = x$) e N a matriz de incidência, ambas referentes ao *design quasi-simétrico* (X, B) .

Da Proposição 2.6 sabe-se que

$$NN^T = (r - \lambda)I + \lambda J. \quad (2.6)$$

Das Definições 2.6 e 2.7 tem-se que

$$NJ = rJ, \quad (2.7)$$

$$JN = kJ, \quad (2.8)$$

e,

$$(N^T N)_{ij} = \begin{cases} k, & \text{se } i = j; \\ x, & \text{se } |B_i \cap B_j| = x; \\ y, & \text{se } |B_i \cap B_j| = y; \end{cases}$$

obtendo-se da última igualdade

$$N^T N = kI + xA + y(J - I - A) \Leftrightarrow N^T N = (k - y)I + yJ + (x - y)A \Leftrightarrow$$

$$A = \frac{1}{x - y} N^T N + \frac{(y - k)}{x - y} I - \frac{y}{x - y} J.$$

Para simplificar os cálculos subsequentes, considere-se

$$\alpha_1 = \frac{1}{x - y}, \quad \alpha_2 = \frac{y - k}{x - y} \quad \text{e} \quad \alpha_3 = \frac{-y}{x - y}.$$

Então,

$$A = \alpha_1 N^T N + \alpha_2 I + \alpha_3 J, \quad (2.9)$$

ou seja,

$$\alpha_1 N^T N = A - \alpha_2 I - \alpha_3 J. \quad (2.10)$$

Consequentemente, de (2.9) vem que

$$A^2 = \alpha_1^2 N^T N N^T N + 2\alpha_1 \alpha_2 N^T N + \alpha_1 \alpha_3 N^T N J + \alpha_2^2 I + 2\alpha_2 \alpha_3 J + \alpha_1 \alpha_3 J N^T N + \alpha_3^2 J J,$$

por (2.6), (2.7) e (2.10), tem-se que

$$A^2 = \alpha_1 N^T ((r - \lambda)I + \lambda J)N + 2\alpha_2 A - 2\alpha_2^2 I - 2\alpha_2 \alpha_3 J + \alpha_1 \alpha_3 r N^T J + \alpha_2^2 I + 2\alpha_2 \alpha_3 J \\ + \alpha_1 \alpha_3 (NJ)^T N + \alpha_3^2 bJ,$$

por (2.7),

$$A^2 = \alpha_1 (r - \lambda) N^T N + \alpha_1 \lambda (JN)^T N + 2\alpha_2 A - \alpha_2^2 I + \alpha_1 \alpha_3 r (JN)^T + \alpha_1 \alpha_3 r JN + \alpha_3^2 bJ,$$

por (2.10) e (2.8)

$$A^2 = (r - \lambda)A - \alpha_2(r - \lambda)I - \alpha_3(r - \lambda)J + \alpha_1\lambda kJN + 2\alpha_2A - \alpha_2^2I + \alpha_1\alpha_3rkJ + \alpha_1\alpha_3rkJ + \alpha_3^2bJ,$$

por (2.8)

$$A^2 = ((r - \lambda) + 2\alpha_2)A + (-\alpha_2(r - \lambda) - \alpha_2^2)I + (-\alpha_3(r - \lambda) + \alpha_1\lambda k^2 + 2\alpha_1\alpha_3rk + \alpha_3^2b)J,$$

Como A^2 é combinação linear de A , I e J , da Proposição 1.8 conclui-se que o grafo dos blocos é um grafo fortemente regular. ■

Exemplo 2.10: Os grafos dos blocos dos sistemas de Steiner $S(2, v, k)$ constituem uma família de grafos fortemente regulares. Uma classe destes grafos são os grafos triangulares $T(n)$ cujos vértices são todos os subconjuntos de dois elementos de um conjunto X ($|X| \geq 4$) e dois vértices são adjacentes se os subconjuntos associados têm um elemento em comum. Estes subconjuntos de dois elementos podem ser vistos como blocos de um sistema de Steiner $S(2, n, 2)$. O grafo triangular $T(n)$ é um grafo fortemente regular com parâmetros $\left(\binom{n}{2}, 2(n-2); n-2, 4\right)$. Por exemplo, para $X = \{1, 2, 3, 4\}$, o grafo $T(4)$ é o grafo cujo conjunto de vértices é $\{12, 13, 14, 23, 24, 34\}$ e encontra-se representado na Fig. 2.6. Este grafo é um grafo fortemente regular com parâmetros $(6, 4; 2, 4)$ e é o grafo dos blocos de um $(4, 2, 1)$ -design.

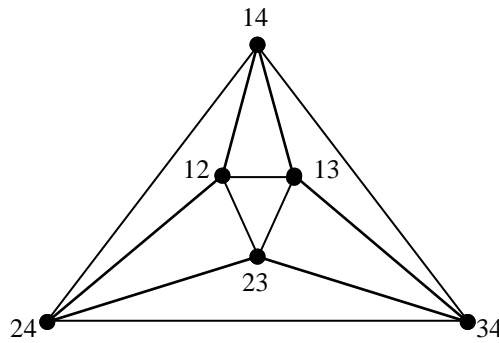


Fig. 2.6: Grafo dos blocos de um $(4, 2, 1)$ -design.

Assim como existem grafos fortemente regulares associados a determinados *designs* também existem *designs* associados a determinados grafos fortemente regulares.

Considere-se um grafo fortemente regular com parâmetros $(v, k; \lambda, \lambda)$. Então, das proposições 1.8 e 2.6,

$$NN^T = N^2 = (k - \lambda)I + \lambda J$$

o que significa que N é a matriz de incidência de um (v, k, λ) -*design* simétrico em que os blocos são as vizinhanças dos vértices do grafo. Por exemplo, a matriz de adjacência do grafo triangular $T(6)$, isto é, do grafo fortemente regular com parâmetros $(15, 8; 4, 4)$ é a matriz de incidência do $(15, 8, 4)$ -*design* simétrico.

De forma semelhante, se N é a matriz de adjacência do grafo fortemente regular com parâmetros $(v, k; \lambda, \lambda + 2)$, então $N + I$ é a matriz de incidência de um $(v, k + 1, \lambda + 2)$ -*design* simétrico. Neste *design*, cada bloco contém a vizinhança de um vértice e o próprio vértice.

Capítulo III: Geometrias finitas

Ao longo da história é grande a evolução do conceito de geometria (ver, por exemplo, [2]). Não esquecendo nomes importantes como Thales e Pitágoras, entre outros, um dos grandes nomes desta área é Euclides, que apresentou a geometria de uma forma axiomática, ainda hoje usada na educação matemática básica.

Alguns conceitos geométricos foram mais tarde generalizados tornando-se mais abstratos e complexos, aproximando-se dos métodos usados na área da matemática, nomeadamente na álgebra.

No século *XVII* aconteceram alguns desenvolvimentos importantes, tais como a criação de geometria analítica com Descartes e Fermat, o que veio a ter importância no desenvolvimento das ciências e do cálculo em matemática; o estudo sistemático da geometria projetiva foi iniciado por Desargues e também por Gaspar Monge. Sem rigor, pode dizer-se que a geometria projetiva despreza a métrica, isto é, preocupa-se somente com o modo como os pontos se alinham uns com os outros.

As geometrias finitas, são geometrias definidas em espaços com um número finito de pontos e de retas e encontram-se em importantes aplicações em áreas como teoria de códigos e criptografia, por exemplo.

Neste capítulo define-se plano afim e plano projetivo finitos, e relacionam-se estas estruturas com os *designs* e grafos referidos nos capítulos precedentes.

3.1 Planos afins

Definição 3.1: Um *plano afim* é um par $A = (P, L)$ onde P é um conjunto finito não vazio, cujos elementos se designam por pontos, e L , também um conjunto não vazio de subconjuntos de P , cujos elementos se designam por retas que verifica os seguintes axiomas:

1. Cada reta $l \in L$ contém pelo menos dois pontos.
2. Para cada par de pontos distintos $p_1, p_2 \in P$, existe uma única reta $l \in L$ que contém ambos os pontos p_1 e p_2 .
3. Existem, pelo menos, quatro pontos tais que quaisquer três deles não pertencem a uma mesma reta.

e, adicionalmente,

AF: Dado um ponto $p \in P$ e uma reta $l \in L$ tal que p não pertence a l , existe uma única reta $l' \in L$ que contém p e é disjunta de l (isto é, $l \cap l' = \emptyset$). Neste caso, diz-se que l e l' são retas paralelas.

Se $A = (P, L)$ é um plano afim tal que cada reta contém q pontos, com $q \in \mathbb{N}$, diz-se que A é um plano afim de ordem q .

Exemplo 3.1: O par $A = (P, L)$, onde $P = \{a, b, c, d\}$ e $L = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$, é um plano afim de ordem 2.

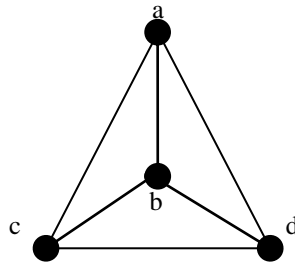


Fig. 3.1: Plano afim de ordem 2 com quatro pontos

De facto, pode-se verificar todos os axiomas da Definição 3.1:

1. Cada elemento de L (reta) tem dois pontos.
2. Cada par de pontos de P , distintos, pertence a uma única reta.
3. É verificado trivialmente, visto que cada reta só contém dois pontos.

AF. Tome-se, sem perda de generalidade, o ponto a ; há três retas às quais este ponto a não pertence $\{b, c\}, \{b, d\}$ e $\{c, d\}$. Analisando cada um dos casos separadamente,

- (i) $\{b, c\}$: A única reta l contendo a tal que $l \cap \{b, c\} = \emptyset$ é a reta $\{a, d\}$.
- (ii) $\{b, d\}$: A única reta l contendo a tal que $l \cap \{b, d\} = \emptyset$ é a reta $\{a, c\}$.
- (iii) $\{c, d\}$: A única reta l contendo a tal que $l \cap \{c, d\} = \emptyset$ é a reta $\{a, b\}$.

O mesmo se pode verificar tomando qualquer um dos outros pontos.

Este plano afim é, também, conhecido por “*Geometria dos quatro pontos*” e corresponde, em teoria dos grafos, ao grafo completo K_4 .

Considere-se um plano afim de ordem q . De acordo com o axioma 2 da Definição 3.1, cada par de pontos pertence a uma, e apenas uma reta, o que significa, na linguagem do capítulo anterior, que cada par de pontos pertence a, exatamente, um bloco; um plano afim de ordem q é, portanto, um $(v, q, 1)$ -*design*. Consequentemente, a geometria dos quatro pontos é um $(4, 2, 1)$ -*design*, em particular, é um sistema de Steiner $S(2, 4, 2)$.

Exemplo 3.2: Um plano afim de ordem 3, com nove pontos, $L = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9\}, \{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6, 9\}, \{1, 5, 9\}, \{2, 6, 7\}, \{3, 4, 8\}, \{1, 6, 8\}, \{2, 4, 9\}, \{3, 5, 7\}\}$. O par (P, L) , com $P = \{1, 2, \dots, 9\}$ é um $(9, 3, 1)$ -*design*.

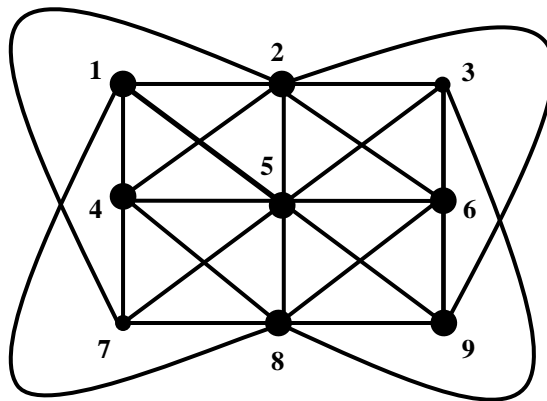


Fig. 3.2: Plano afim de ordem 3 com nove pontos.

Proposição 3.1: Seja $A = (P, L)$ um plano afim finito de ordem q , com $q \in \mathbb{N}$, então:

- (1) Cada ponto pertence a, exatamente, $q + 1$ retas.
- (2) O plano tem, exatamente q^2 pontos.
- (3) Existem, exatamente, $q^2 + q$ retas.

Demonstração: [5] Seja $A = (P, L)$ um plano afim finito de ordem q .

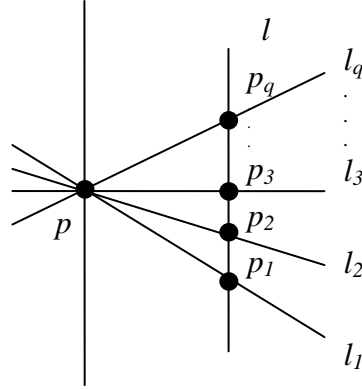


Fig. 3.3: Ilustração para demonstração do Proposição 3.1

(1) Sejam $l \in L$ uma reta e $p \in P$ um ponto que não pertence à reta l . Tem-se que p e cada um dos p_i pontos definem uma única reta, logo $\{p, p_i\}$, $(1 \leq i \leq q)$ são q retas contendo o ponto p . Além disso, há uma única reta que passa por p e é paralela à reta l , logo p pertence a $q + 1$ retas.

(2) Seja v o número de pontos e b o número de retas. Uma vez que cada reta contém q pontos e cada ponto pertence a $q + 1$ retas, então o número de pontos é igual a $v = \frac{bq}{q+1}$, ou seja,

$$b = \frac{v(q+1)}{q} \quad (3.1)$$

Contando o número de pares de pontos de duas maneiras distintas, vem que, por um lado existem $\binom{v}{2} = \frac{1}{2}v(v-1)$ pares de pontos e, uma vez que cada reta contém

$\binom{q}{2} = \frac{1}{2}q(q-1)$ pares de pontos, pode-se concluir que

$$b = \frac{v(v-1)}{q(q-1)}. \quad (3.2)$$

Substituindo b , (de (3.1)), na equação (3.2), obtém-se:

$$\frac{v(q+1)}{q} = \frac{v(v-1)}{q(q-1)}, \text{ donde } v = q^2.$$

(3) Substituindo $v = q^2$ em $b = \frac{v(v-1)}{q(q-1)}$, obtém-se $b = \frac{q^2(q^2-1)}{q(q-1)} = q(q+1)$. ■

De acordo com a Proposição 3.1, um plano afim de ordem q é um $(q^2, q, 1)$ -design ; em particular, é um sistema de Steiner $S(2, q^2, q)$.

3.2 Planos projetivos

Definição 3.2: Um plano projetivo é um par $\pi = (P, L)$, onde P é um conjunto finito não vazio, cujos elementos se designam por *pontos*, e L é também um conjunto não vazio de subconjuntos de P , cujos elementos se designam por *retas*, que verifica os seguintes axiomas:

1. Cada reta $l \in L$ contém pelo menos dois pontos.
2. Para cada par de pontos distintos $p_1, p_2 \in P$, existe uma única reta $l \in L$ que contém ambos os pontos p_1 e p_2 .
3. Existem, pelo menos, quatro pontos tais que quaisquer três deles não pertencem a uma mesma reta.

e, adicionalmente,

AP: Para cada par de retas $l_1, l_2 \in L$ distintas, existe um único ponto $p \in P$ que pertence a ambas as retas l_1 e l_2 .

Se $\pi = (P, L)$ é um plano projetivo tal que cada reta contém $q+1$ pontos, diz-se que a ordem de π é q .

Exemplo 3.3: O par (P, L) com $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $L = \{\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 7\}, \{5, 6, 1\}, \{6, 7, 2\}, \{7, 1, 3\}\}$ é um plano projetivo de ordem 2,

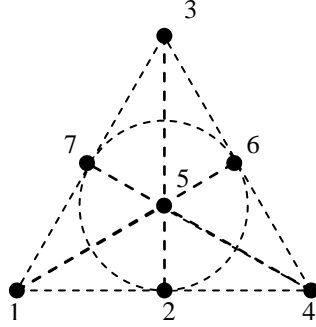


Fig. 3.4: Plano Projetivo de ordem 2 com sete pontos.

De facto, o par (P, L) verifica os axiomas enunciados na Definição 3.2. Este plano projetivo é conhecido como Plano de Fano. Na Fig. 3.4 os pontos estão representados com bolas pretas e as linhas a tracejado são uma representação das retas que são conjuntos com três elementos (pontos ligados por essas linhas tracejadas). Trocando os papéis dos pontos com as retas obtém-se ainda um plano projetivo – o seu dual.

Esta propriedade é válida para qualquer plano projetivo: pode-se mostrar que num plano projetivo o número de pontos é sempre igual ao número de retas.

Proposição 3.2: Seja $\pi = (P, L)$ um plano projetivo finito de ordem q , com $q \in \mathbb{N}$, então:

- (1) Cada ponto pertence a $q+1$ retas.
- (2) O plano tem, exatamente $q^2 + q + 1$ pontos.
- (3) Existem, exatamente, $q^2 + q + 1$ retas.

Demonstração: [5] e [15], Seja $\pi = (P, L)$ um plano projetivo finito de ordem q .

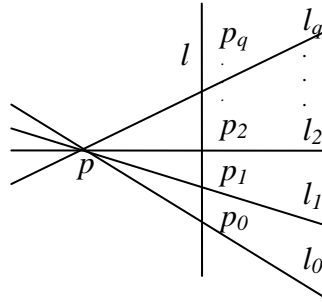


Fig. 3.5: Ilustração para a demonstração do Proposição 3.2

(1) Considere um ponto arbitrário $p \in P$. Primeiro, considere-se uma reta $l \in L$, que contém os pontos p_0, p_1, \dots, p_q e que não contém p . Dados dois pontos distintos de l , p_i e p_j , p não pertence a qualquer reta que contenha ambos os pontos, portanto, para cada ponto $y \in l$, há $q+1$ retas que contêm p e y . Por outro lado, qualquer reta que contém p intersecta l em algum ponto, logo por p passam exatamente $q+1$ retas.

(2) Dado um ponto arbitrário $p \in P$, pode-se concluir que ele é a intersecção de, exatamente, $q+1$ retas distintas que contêm todos os pontos do plano π . Uma vez que cada uma destas retas tem, exatamente, q pontos distintos de p , então $(q+1)q+1 = q^2 + q+1$ pontos.

(3) Seja l uma reta do plano projetivo π . Já sabe-se, que o plano tem ordem q , logo l contém $q+1$ pontos e por (1), que cada ponto de l está contido em q retas distintas de l . Logo, pode-se concluir que π contém, exatamente, $(q+1)q+1 = q^2 + q+1$ retas. ■

Fica claro, a partir da Proposição 3.2 que um plano projetivo de ordem q é um $(q^2 + q+1, q+1, 1)$ -design; na verdade um plano projetivo é um design simétrico com $\lambda = 1$. Em particular, é um sistema de Steiner $S(2, q^2 + q+1, q+1)$.

Não é difícil mostrar que o plano de Fano é o plano projetivo de menor ordem. Se existisse um plano projetivo de ordem 1, então cada reta conteria $q+1 = 1+1 = 2$ pontos e cada ponto pertenceria a duas retas. Além disso, devem existir $q^2 + q+1 = 3$ pontos e três

retas. No entanto, isto contradiz os axiomas da definição de plano projetivo, pois de acordo com o axioma 3, deve haver um conjunto de quatro pontos de tal forma que três deles não sejam colineares. Isto implica que qualquer plano projetivo deve ter pelo menos quatro pontos. Portanto, um plano projetivo de ordem 1 não pode existir. O menor plano projetivo que existe é de ordem 2, tem sete pontos e sete retas.

Não existem planos projetivos de qualquer ordem. Os planos projetivos que se conhecem têm ordem igual a uma potência de um número primo.

Exemplo 3.4: O plano projetivo de ordem 3 tem $q^2 + q + 1 = 13$ pontos e é definido por (X, B) , com $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ e $B = \{\{1, 4, 7, 13\}, \{2, 5, 8, 13\}, \{3, 6, 9, 13\}, \{1, 5, 9, 12\}, \{2, 6, 7, 12\}, \{3, 4, 8, 12\}, \{1, 2, 3, 11\}, \{4, 5, 6, 11\}, \{7, 8, 9, 11\}, \{1, 6, 8, 10\}, \{2, 4, 9, 10\}, \{3, 5, 7, 10\}, \{10, 11, 12, 13\}\}$, e encontra-se representado na Fig. 3.6 [7]. Pode ver-se com facilidade que é um *design* simétrico com parâmetros $(13, 4, 1)$.

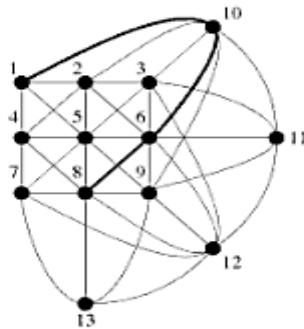


Fig. 3.6: Plano projetivo de ordem 3 com treze pontos.

À medida que vai aumentando a ordem do plano, vai-se tornando mais difícil fazer a sua representação; um plano projetivo de ordem 4 tem $q^2 + q + 1 = 21$ pontos e a sua representação é a seguinte [9]:

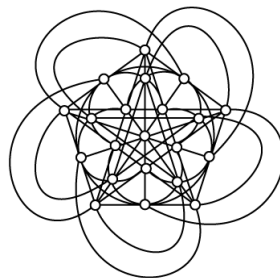


Fig. 3.7: Plano projetivo de ordem 4 com vinte e um pontos.

Um *biplano* pode ser definido com um (v, k, λ) -*design simétrico* com $\lambda = 2$. Em linguagem da geometria é uma estrutura em que cada par de pontos pertence a duas retas e cada par de retas intersectam-se em dois pontos.

Um biplano tem ordem $q = k - 2$, onde k é o número de pontos existentes em cada reta.

De acordo com (2.2), o número de pontos de um biplano de ordem q é

$$v = 1 + \frac{(q+2)(q+1)}{2}.$$

Exemplos 3.5: Considere-se um biplano de ordem q :

- Se $q = 0$, então $k = 2$ e o número de pontos é dado por $v = 1 + \frac{(q+2)(q+1)}{2} = 1 + \frac{2}{2} = 2$; o par (X, B) , com $X = \{1, 2\}$ e $B = \{\{1, 2\}, \{2, 1\}\}$ (os dois pontos pertencem a ambos os blocos), pode ser visto como um $(2, 2, 2)$ -*design* se na Definição 2.2 for admitida a repetição de blocos.

- Se $q = 1$, então $k = 3$ e $v = 1 + \frac{(q+2)(q+1)}{2} = 1 + \frac{6}{2} = 4$ pontos; o par (X, B) , onde $X = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$, é um $(4, 3, 2)$ -*design*, onde os pontos e os blocos são os vértices e as faces de um tetraedro, respectivamente. Em teoria dos grafos esta estrutura corresponde a um grafo completo K_4 .

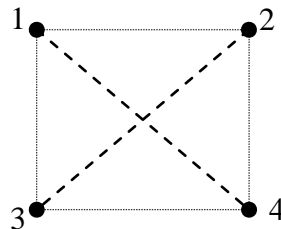


Fig. 3.8: Biplano de ordem 1 e $k = 3$

• Se $q = 2$, tem-se que $k = 4$ e $v = 1 + \frac{(q+2)(q+1)}{2} = 1 + \frac{12}{2} = 7$ e o número de retas é igualmente sete. O par (X, B) , com $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $B = \{\{3, 5, 6, 7\}, \{2, 4, 5, 6\}, \{2, 3, 4, 7\}, \{1, 4, 6, 7\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 5, 7\}, \{1, 2, 3, 6\}\}$, é um $(7, 4, 2)$ -design. Este biplano é o complementar do plano de Fano (isto é, as retas são os conjuntos complementares em X das retas que constituem o plano de Fano).

3.3 Grafo de incidência de um plano projetivo

Definição 3.3: Considere-se o plano projetivo $\pi = (P, L)$. Designa-se por *grafo de incidência de um plano projetivo* π o grafo bipartido $G = (P, L, E)$ tal que, para $p \in P$ e $l \in L$, $pl \in E$ se e apenas se o ponto p pertence à reta l .

Exemplo 3.6: [5] e [15] Na Fig. 3.9 mostra-se o grafo de incidência do plano de Fano, também conhecido como grafo de Heawood, os vértices do grafo estão etiquetados com as etiquetas dos pontos e das retas correspondentes.

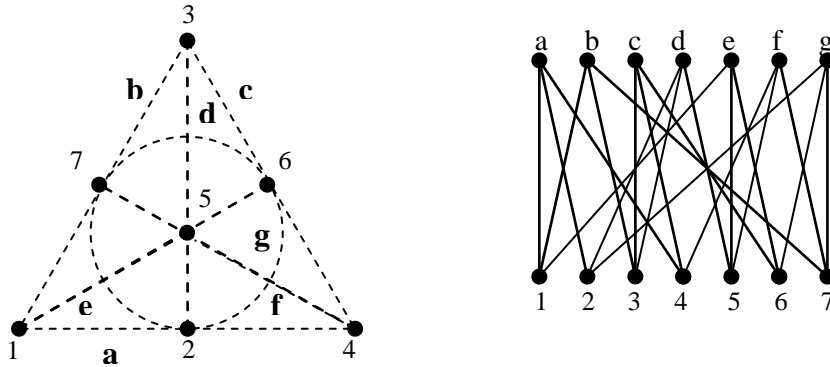


Fig. 3.9: Plano de Fano e o seu grafo de incidência

Proposição 3.3: O grafo de incidência de um plano projetivo é um grafo regular com cintura 6.

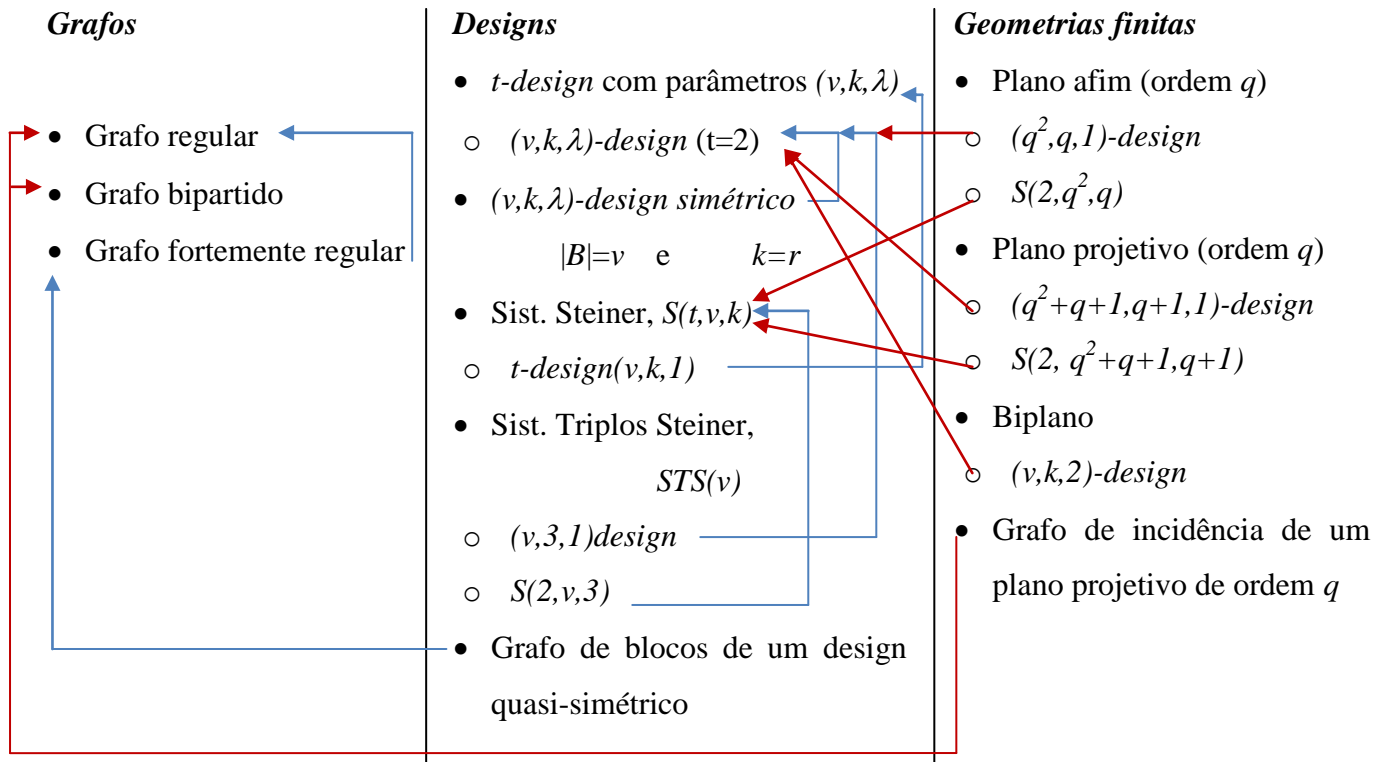
Demonstração: Do ponto 2. da Definição 3.2 conclui-se que o grafo de incidência G não contém ciclos de comprimento quatro. Logo, como G é bipartido, do Proposição 1.1

conclui-se que $g(G) \geq 6$. Verifique-se que G tem um ciclo de comprimento seis. Se p_1, p_2 são pontos distintos do plano projetivo então $p_1, p_2 \in l_1$. Seja l_2 uma reta que contém p_2 e não contém p_1 e seja p_3 um ponto distinto de p_1 e p_2 que pertence a l_2 . Então $p_1, p_3 \in l_3$. Forma-se um ciclo de comprimento seis: $C = p_1, l_1, p_2, l_2, p_3, l_3, p_1$. ■

Da Definição 3.2 e das Proposições 3.2 e 3.3 pode-se concluir que o grafo de incidência de um plano projetivo de ordem q é um grafo bipartido, $(q+1)$ -regular, de cintura seis.

Conclusão

Neste trabalho estudaram-se algumas estruturas combinatórias simples, nomeadamente, grafos, em particular os grafos fortemente regulares, t -designs com especial ênfase para os Sistemas de Steiner e, no último capítulo, fez-se uma introdução elementar dos planos afins e projetivos. Foram apresentados ao longo do texto, exemplos concretos de estruturas que podem ser interpretadas de diferentes formas: como grafos, como designs e como geometrias finitas. No diagrama seguinte são postas em evidência de um modo esquemático, algumas relações entre os conceitos estudados nos três capítulos do trabalho.



- N é matriz de adjacência de um GFR $(v, k; \lambda, \lambda) \Rightarrow N$ é a matriz de incidência de um (v, k, λ) -design simétrico
- N é matriz de adjacência de um GFR $(v, k; \lambda, \lambda + 2) \Rightarrow N + I$ é a matriz de incidência de um $(v, k + 1, \lambda + 2)$ -design simétrico

Referências bibliográficas

- [1] Bose, R.C. Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs. *Pacific J. Math*, 13, 2 (1963), 389-419.
- [2] Boyer, C.B. *História da Matemática*. Ed. Edgar Blücher Lda., São Paulo. 1974.
- [3] Brouwer, A.E., Haemers, W.H. *Spectra of graphs*. Disponível em:
<http://homepages.cwi.nl/~aeb/math/ipn.pdf> (acesso em: 1 de Junho de 2011).
- [4] Cardoso, D.M. *Grafos e Combinatória*. Universidade de Aveiro, Departamento de Matemática, 2004/2005. Disponível em:
<http://www2.mat.ua.pt/disciplinas/gc/2004-2005/Documentos/TextoGC.pdf> (acesso em 1 de Junho de 2011).
- [5] Cardoso, D.M., Szymanski, J., Rostami, M. *Matemática Discreta, Combinatória, Teoria dos Números e Algoritmos*. Escolar Editora, 2009.
- [6] Cherowitzo, W. *t-Designs*. Disponível em:
<http://math.ucdenver.edu/~wcherowi/courses/m6406/tdesigns.pdf> (acesso em 1 de Junho de 2011).
- [7] Comellas, F.; Fàbrega, J.; Sànchez A.; Serra, O. *Matemática Discreta*. Edicions UPC. Universitat Politècnica de Catalunya, 2009.
- [8] Delsarte, Ph., Goethals, J.M. Seidel, J.J. Bounds for systems of lines and Jacobi polynomials. *Philips Res. Rep.*, 30: (1975) 91-105.
- [9] *Finite Geometry problem page. Problem 14: The Projective Plane*. Disponível em:
http://home.wlu.edu/~mcraea/finite_geometry/NoneuclideanGeometry/Prob14ProjPlane/problem14.html (acesso em: 11 de Maio de 2011).

-
- [10] Grannell, M. J. Some rigid Steiner 5-designs. *Journal of combinatorial designs*, 18 (2010) 392-400.
- [11] Hall Jr., M., *Combinatorial Theory*. Second Edition. John Wiley & Sons, 1998.
- [12] Horn, R.A., Johnson, C.R. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1985.
- [13] Kirkman, T.P., On a Problem in Combinations. *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, 2 (1847) 191–204.
- [14] Lint, J.H. van, Wilson, R.M. *A Course in Combinatorics*. Cambridge University Press. 1992
- [15] Matousek, J., Nešetřil, J. *Invitación a la Matemática Discreta*. Editorial Reverté, Barcelona, 2008.
- [16] Polster, B. *A Geometrical Picture Book*. Springer-Verlag New York, 1998.
- [17] Rama, P. *Aspectos Algébricos da Teoria dos Grafos*. Seminário de Investigação Operacional. Universidade de Aveiro - Departamento de Matemática. 2007. Disponível em:
http://blogs.ua.pt/dmat/paularama/wp-content/uploads/2010/02/espectro12_2005n3.pdf
(acesso em: 1 de Junho de 2011)
- [18] Scott Jr., L.L. A condition on Higman's parameters. *Notices of Amer. Math. Soc.*, 20, A-97: (1973).